Elementos de Cálculo Numérico (M) / Cálculo Numérico (F)

Segundo Parcialito Matlab - Turno Mañana

Ejercicio 1. La velocidad de un objeto en caída libre puede modelarse con la ecuación:

$$\dot{v} = -\frac{\gamma}{m}v^2 + g \tag{1}$$

siendo v la velocidad, m la masa del cuerpo, $g = 9.81$ la aceleración gravitatoria y γ una constante que representa el rozamiento con el aire. Supondremos que los objetos son soltados desde el reposo, por lo cual tomaremos $v(0) = 0$.

A su vez, la altura x del objeto estará determinada por la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -v \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

donde el signo en v se debe a que la velocidad va en sentido negativo respecto de la altura.

Implemente una función `caida` que reciba como parámetros:

- La altura inicial x_0.
- La masa m del objeto.
- La constante de rozamiento γ.
- Un paso h.

y resuelva el problema de caída libre utilizando el método de Euler. La resolución se debe realizar por un tiempo indefinido, deteniéndose el algoritmo cuando el objeto alcanza el suelo. El programa deberá devolver:

- Un vector de tiempos: `t = [0,h,2h,...,T]`, donde `T` es el tiempo final, en el que el objeto llega al piso.
- Un vector con la altura del objeto para cada tiempo en `t`.
- Un vector con la velocidad del objeto para cada tiempo en `t`.

Este problema puede abordarse de dos formas: o bien como un sistema de ecuaciones acopladas, con una variable vectorial cuyas coordenadas sean v y x; o bien tomando las variables v y x por separado, usando los valores aproximados v_i para estimar x_i.

Ejercicio 2. Lea el siguiente párrafo:

> – Pero, Simplicio, tengo la esperanza de que no seguirás el ejemplo de muchos otros que desvían la discusión de un punto principal y dicen que algunas de mis afirmaciones se apartan de la verdad por un cabello, y por este cabello esconden las faltas de otras teorías tan gruesas como un cable de navío. Aristóteles dice que 'una esfera de hierro de 100 libras, cayendo desde una altura de 100 codos,

> llega a la tierra antes que una bola de 1 libra haya caído un simple codo'. Yo digo que las dos llegan al mismo tiempo. Tú encuentras, al hacer la experiencia, que la más pesada adelanta a la más ligera en 2 ó 3 dedos ...; ahora, no puedes esconder detrás de estos dos dedos los 99 codos de Aristóteles, ni puedes mencionar mi error y, al mismo tiempo, pasar en silencio el tuyo, mucho mayor.
>
> Salviati, en *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* - Galileo Galilei.

Viviani, estudiante de Galileo, afirma que su maestro realizó efectivamente el experimento descripto en el párrafo anterior, arrojando desde lo alto de la torre de Pisa una bala de cañón y una bala de mosquete. El objetivo de este ejercicio es reproducir numéricamente la experiencia de Galileo.

La Torre de Pisa mide 55.8 mts. La masa de una bala de cañón es de 16 Kg, y la de una bala de mosquete 0.0082 Kg. Las costantes de rozamiento para cada bala son: $\gamma_c = 0.0058$ y $\gamma_m = 3.74 \times 10^-5$, respectivamente (la diferencia se debe a la diferencia de tamaños).

Implemente un programa llamado `galileo` que utilice la función `caida` para obtener la dinámica de la caída de ambas balas, y grafique, en una misma figura, la posición de cada bala en función del tiempo. A partir de los resultados obtenidos, responda:

1. ¿Cuánto tiempo tarda cada bala en tocar el suelo?

2. ¿Cuán lejos del suelo está la bala de mosquete cuando la bala de cañón llega al piso?[1]

Ejercicio 3. Se desea saber desde qué altura debe soltarse la bala de mosquete, para que llegue al piso exactamente al mismo tiempo que la de cañón. Llamemos T_c al tiempo que tarda la bala de cañón en alcanzar el piso, al ser lanzada desde los 55.8 mts de la torre de Pisa; y llamemos $T_m(z)$ al tiempo que tarda en tocar el suelo la bala de mosquete, en función de la altura inicial z. Ya sabe que $T_m(55.8) > T_c$. En cambio, $T_m(40) < T_c$. Implemente un programa llamado `mosquete` que, utilizando la función `caida`, encuentre una altura z_0 tal que $|T_m(\tilde{z_0}) - T_c| < 0.1$. Esto puede lograrse, por ejemplo, disminuyendo los valores de z iterativamente hasta alcanzar uno que satisfaga la tolerancia deseada. También es posible (y más eficiente) utilizar un argumento de tipo bisección.

Recordar:

El método de Euler para la ecuación $y' = f(t, y)$ viene dado por:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

Entrega:

Los programas deberán ser enviados por mail a la dirección: `ecn.matlab@gmail.com`. El asunto del mail deberá ser su nombre, su apellido y su número de libreta universitaria.

[1] No cometa el mismo error que Simplicio al juzgar los resultados. Tenga en cuenta que la bala de cañón es alrededor de 2000 veces más pesada que la de mosquete. Consecuentemente, Aristóteles hubiese pronosticado que al llegar la bala de cañón al piso, la de mosquete habría descendido apenas 2 cm.