Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primer Cuatrimestre - 2014

Práctica 5: Estabilidad de los Puntos de Equilibrio y Función de Liapunov

Definiciones, Funciones y Teorema de Liapunov

1. Sea $V(x)$ una función de Liapunov para

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

en $\mathbb{R}^n$. Probar que si V es diferenciable, entonces

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle.$$

2. Sea la ecuación del péndulo

$$\ddot{\theta} = -w^2 \operatorname{sen}(\theta)$$

donde θ es un ángulo y w es una constante.

   a) Probar que admite una preintegral $E(\theta, \dot{\theta})$.

   b) Demostrar que $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio estable pero no asintóticamente estable en el futuro.

   c) Probar que si $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ son pequeños, entonces las órbitas que en $t = 0$ esá en $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ es periódica.
   Hint: La ecuación $E(\theta, \dot{\theta}) = cte$ es una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \operatorname{sen}^2(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

   a) Hallar los puntos de equilibrio del $\dot{x} = f(x)$. Verifique que el 0 es estable pero no asintóticamente estable.

   b) Probar que no existen funciones V de Liapunov definidas positivas en un entorno de 0 con $\dot{V}$ semidefinida negativa. Concluir que el recíproco del primer Teorema de Liapunov es falso.

4. Consideremos el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + f(x, y) \\ \dot{y} = \sin x \end{cases}$$

donde $f(0, 0) = 0$ y $xf(x, y) \leq 0$. Probar que $(0, 0)$ es estable en el futuro.

5. Considerar el sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(z-1), \\ \dot{y} = -x(z-1), \\ \dot{z} = xy. \end{cases}$$
   a) Mostrar que la solución $(0,0,0)$ es estable.
   b) ¿Es esta solución asintóticamente estable?

6. Sea x_0 un punto de equilibrio asintóticamente estable de (1).
   a) Probar que existe un entorno U de x_0 tal que: si $x \in U$ entonces $\varphi(x,t)$ es estable en el futuro.
   b) Mostrar que la afirmación anterior no es cierta si se pide solo que sea estable.

7. Considerar en el plano el siguiente sistema escrito en coordenadas polares
$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1-\rho), \\ \dot{\theta} = \operatorname{sen}^2(\frac{\theta}{2}). \end{cases}$$
   Bosquejar las soluciones en el plano de fases. Hallar los puntos de equilibrio. Verificar que existe un entorno del punto de equilibrio $(1,0)$ tal que toda solución que pase por dicho entorno tiende a $(1,0)$ en el futuro, pero $(1,0)$ no es estable.

8. Sea $E : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una preintegral de $\dot{x} = f(x)$ y con $f(x_0) = 0$; $E(x) > E(x_0)$ para todo $x \neq x_0$ en U entorno de x_0.
   a) Demostrar que x_0 es estable en el futuro y en el pasado.
   Hint: Tomar $V(x) = E(x) - E(x_0)$.
   b) Demostrar que x_0 no es asintóticamente estable.
   c) Estudiar la estabilidad en el futuro y en el pasado, de $(0,0)$ en
$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen}(y), \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases}$$

9. Determinar la estabilidad de la solución $(x,\dot{x}) = (0,0)$ de $\ddot{x} + x^n = 0$.

   Definición: Sea p_0 un pozo (punto de equilibrio asintóticamente estable en el futuro). Se llama cuenca de atracción de p_0 al conjunto de los puntos q tales que $\varphi(q,t)$ está definido $\forall t \geq 0$ y $\varphi(q,t) \to p_0$ cuando $t \to +\infty$.

10. Probar que la cuenca de atracción de un pozo es un conjunto abierto.

11. Sea x_0 un pozo, y sea y_0 un punto en la frontera de la cuenca C de atracción de x_0. Probar que
    a) $y_0 \notin C$.
    b) y_0 no es estable en el futuro.

12. Demostrar que $(0,0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable de

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + (x^2+y^2-1)x^3, \\ \dot{y} = x + (x^2+y^2-1)y^3, \end{cases}$$

y determinar su cuenca de atracción.

Teorema de Cetaev y de Massera

13. Probar que los pozos no son estables Liapunov en el pasado y que las fuentes no son estables Liapunov en el futuro.

    Hint: Usar los Teoremas de Massera y Cetaev.

14. Sabiendo que existe una función de Liapunov V con $\dot{V}$ definida negativa, en un entorno del punto de equilibrio x_0, demostrar que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

    a) $V(x) - V(x_0)$ es definida negativa en algún entorno de x_0.

    b) x_0 es estable en el futuro.

    c) x_0 es asintóticamente estable en el futuro.
    Hint: para ver que b) implica a) usar el Teorema de Cetaev.

15. Demostrar que si existe una función de Liapunov V con $\dot{V}$ definida negativa en un entorno del punto de equilibrio x_0, entonces existe un $\varepsilon > 0$, tal que para todo $x \in B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x,t) \notin B_\varepsilon(x_0)$.

16. Sea $\dot{x} = f(x)$ en $\mathbb{R}$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $f(x_0)$. Probar que x_0 es asintóticamente estable si y solo si $V(x) := (x-x_0)^2$ es definida positiva con $\dot{V}$ definida negativa en un entorno de x_0.

Aproximación Lineal

17. La ecuación de Lienard

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{2}$$

con $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o equivalentemente, $\ddot{x} + f'(x)\dot{x} + x = 0$, juega un importante rol en la teoría de circuitos eléctricos. Como caso especial, uno obtiene la ecuación de Van der Pol si $f(x) = x^3 - x$.

    a) Si se tiene que $f'(0) \neq 0$, determinar la estabilidad en el futuro de los puntos de equilibrios de (2) en función de $f'(0)$.

    b) Si se tiene que $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ cuando $x \neq 0$, mostrar que el origen es un punto de equilibrio estable en el futuro.

18. Determinar la estabilidad del origen para los sistemas:

a) $\ddot{x} + \dot{x} + \sin(x) = 0.$

b) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy + x^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^5. \end{cases}$

19. Analizar la estabilidad del origen de los siguientes campos y en la parte lineal de cada uno de ellos. Comparar.

a) $\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

20. Probar que la cuenca de atracción de $(0,0)$ para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3, \\ \dot{y} = x - y^3, \end{cases}$$

es $C = \mathbb{R}^2$. Observar que $(0,0)$ es un punto de equilibrio inestable para el sistema linealizado.