Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primer Cuatrimestre - 2014

Práctica 4: Sistemas No Lineales

Flujos y Conjuntos Invariantes

1. Dibujar el flujo φ_t de los siguientes sistemas lineales $\dot{X} = AX$ y describir $\varphi_t(B(x_0, \varepsilon))$ para $x_0 = (-3, 0)$.

   a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Determinar el flujo $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ para el sistema no lineal

$$\dot{X} = f(X). \tag{1}$$

   con $f(x, y) = (-x, 2y + x^2)$, y mostrar que $S = \{(x, y) \colon y = \frac{-x^2}{4}\}$ es invariante respecto a φ_t.

3. Determinar el flujo $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ para el sistema no lineal (1) con $f(x, y, z) = (-x, -y+x^2, z+x^2)$, y mostrar que $S = \{(x, y, z) \colon z = \frac{-x^2}{3}\}$ es invariante respecto a φ_t.

4. Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el flujo asociado a (1). Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ acotado y medible y $V = \int_M \, dx$. Definimos $M(t) = \varphi_t(M)$ y $V(t) = \int_{M(t)} \, dx$. Probar que

$$\dot{V}(t) = \int_{M(t)} \operatorname{div}(f(x)) \, dx.$$

   Definición. Sea Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el flujo asociado a (1). Un punto $x \in \mathbb{R}^N$ se dice un punto periódico si existe algún $T \neq 0$ tal que

$$\varphi_{t+T}(x) = \varphi_t(x) \quad \forall t.$$

5. Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el flujo asociado a (1). Probar que

   a) x es un punto periódico si y solo si existe $T \neq 0$ tal que $\varphi_T(x) = x$.

   b) Si x es un punto periódico, pero no punto de equilibrio, entonces existe un período mínimo T de x y $\{Tn \colon n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ es exactamente el conjunto de todos los períodos.

6. Sean $f \in C^1$, $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el flujo asociado a (1) y $M \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y positivamente invariante respecto a φ_t. Probar que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\operatorname{dist}(x + tf(x), M)}{t} = 0 \quad \forall x \in M.$$

7. Sean $f \in C^1$, $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el flujo asociado a (1) y $M \subset \mathbb{R}^n$. Probar que

   a) Si M es invariante respecto a φ_t entonces $\overline{M}$ también lo es.

   b) Si M es cerrado, M es positivamente invariante respecto a φ_t si y solo si $\forall x \in M$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi_t(x) \in M$ $\forall t \in [0, \epsilon)$.

   c) M es invariante respecto a φ_t si y solo si M^c es invariante respecto a φ_t.

   d) Si M es invariante respecto a φ_t entonces $int(M)$ también lo es.

   e) Si M es invariante respecto a φ_t entonces ∂M también lo es. Si ∂M es invariante respectoa φ_t entonces $\overline{M}$ y $int(M)$ tambien lo es.

Linealización

8. Clasificar los puntos de equilibrio del sistema no lineal (1) con $f(x)$ dada por

   a) $\begin{pmatrix} x_1 - x_1x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} -4x_2 + 2x_1x_2 - 8 \\ 4x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_1x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ kx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

9. Mostrar que la función $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $H(x) = (x_1, x_2 + x_1^2, x_3 + \frac{x_1^2}{3})$ tiene una función inversa H^{-1} y que el sistema lineal (1) con

$$f(x) = (-x_1, -x_2 + x_1^2, x_3 + x_1^2)$$

   se transforma en el sistema lineal

$$\dot{y} = Df(0)y$$

   bajo la función H, i.e., si $y = H(x)$ mostrar que $\dot{y} = Df(0)y$.

Teorema de la Variedad Estable

10. Escribir el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 6x_2 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + 3x_2 - x_1^2 \end{aligned}$$

   en la forma

$$\dot{y} = By + G(y)$$

   donde

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

   $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ y $G(y)$ es cuadrática en y_1 e y_2.

11. Encontrar las tres primeras aproximaciones sucesivas $u^{(1)}(t,a)$, $u^{(2)}(t,a)$ y $u^{(3)}(t,a)$ para

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \end{aligned}$$

y usar $u^{(3)}(t,a)$ para aproximar S cerca del origen. Aproximar también la variedad inestable, U cerca del origen. Observar que $u^{(2)}(t,a) = u^{(3)}(t,a)$ y por lo tanto $u^{(j+1)}(t,a) = u^{(j)}(t,a)$ para $j \geq 2$. Entonces $u^{(j)}(t,a) \to u(t,a) = u^{(2)}(t,a)$ que da exactamente la función que define S.

12. Resolver el sistema del problema anterior, y mostrar que S y U están dadas por

$$S : x_2 = -\frac{x_1^2}{3}$$

y

$$U : x_1 = 0.$$

Esbozar S, U, E^s y E^u.

13. Hallar las cuatro primeras aproximaciones sucesivas $u^{(1)}(t,a)$, $u^{(2)}(t,a)$, $u^{(3)}(t,a)$ y $u^{(4)}(t,a)$ para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_2^2. \end{aligned}$$

Mostrar que $u^{(j)}(t,a) = u^{(3)}(t,a)$ para todo $j \geq 3$ y concluir que $u(t,a) = u^{(3)}(t,a)$. Hallar S y U para este problema.

14. Mostrar que el diagrama de flujo del sistema lineal perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \\ \dot{y} = x + yr^2 \sin(\frac{\pi}{r}) \end{cases}$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$, tiene el siguiente comportamiento cualitativo: existe una sucesión de círculos concéntricos centrados en $(0,0)$ con radio $\frac{1}{n}$ tales que las órbitas se espiralan alternativamente acercándose y alejándose de cada uno de ellos en el sentido positivo.

15. Sea

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= ax_1 - bx_1x_2, \quad x_1(0) = \xi_1 \geq 0 \\ \dot{x_2} &= dx_2 - ex_1x_2 \quad x_2(0) = \xi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde a, b, d, e son constantes positivas.

   a) Encontrar los puntos de equilibrio.

   b) Hallar sus variedades estable e inestable.

c) Demostrar que

$$G_1 = \left\{ (x_1, x_2)/\ 0 < x_1 < \frac{d}{e},\ x_2 > \frac{a}{b} \right\}$$

y

$$G_2 = \left\{ (x_1, x_2)/\ 0 < x_2 < \frac{a}{b},\ x_1 > \frac{d}{e} \right\},$$

son conjuntos positivamente invariantes.

d) Dibujar aproximadamente el diagrama de fases.

Teorema de Hartman-Grobman

16. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$

y probar que las aproximaciones sucesivas $\phi_k \to \phi$ y $\psi_k \to \psi$ cuando $k \to \infty$ para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Definir $H_0 = (\phi, \psi)^T$ y usar este homemorfismo para encontrar

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s \, ds.$$

Usar el homoemorfismo H para encontrar las variedades estables e inestables $W^s(0) = H^{-1}(E^s)$ y $W^u(0) = H^{-1}(E^u)$ para este sistema.

Ayuda: Tienen que obtener, $H(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3^2/3, x_3)^T$

$$W^s(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\}$$

y

$$W^u(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0,\ x_2 = x_3^2/3\}.$$