

Práctica 3: Sistemas Lineales

Algunos Resultados Algebraicos

1. Probar que una matriz es nilpotente si y sólo si todos sus autovalores son nulos.
2. Sean $A, B : I \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ diferenciables. Probar que

a) $\frac{d}{dt}A(t)B(t) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t)$.

b) Si $\det(A(t)) \neq 0$ entonces $\frac{d}{dt}A(t)^{-1} = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}$.

c) $\frac{d}{dt}(\det A(t)) = \sum \det(a_1(t), \dots, \dot{a}_j(t), \dots, a_n(t))$, donde $a_j(t)$ representa la columna j de $A(t)$.

3. Mostrar que para toda matriz A de $n \times n$ se tiene que

$$\det(Id + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr}(A) + o(\varepsilon).$$

Sistemas con Coeficiente Constantes

4. a) Hallar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas. En II., IV. y V. resolver además el problema de valores iniciales.

I) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$

IV) $\begin{cases} \dot{x} = -2y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$

II) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = x + 2y & y(0) = -1 \end{cases}$

V) $\begin{cases} \dot{x} = x + y & x(0) = \sqrt{3} \\ \dot{y} = -x + y & y(0) = 1 \end{cases}$

III) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

- b) ¿Cuáles son las soluciones $(x(t), y(t))$ que verifican

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(x(t), y(t))\| = 0?$$

¿Cuáles verifican

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(x(t), y(t))\| = \infty?$$

- c) Esbozar los diagramas de fases.

5. Sea A una matriz de 2×2 con autovalores reales λ y μ asociados respectivamente a los autovectores $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Esbozar el diagrama de fases de $x' = Ax$ si

10. Utilice el método de variación de las constantes para hallar la solución general del sistema

$$x' = Ax + b(t) \quad (1)$$

donde $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.

11. Resuelva el sistema no homogéneo (1) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

y condición inicial $x(0) = (1, 0)$.

12. Encontrar todas las soluciones de:

$$\begin{cases} x' = y + \exp(2t) \\ y' = -4x + 4y + 1 \end{cases} .$$

13. Encontrar la solución de

$$\begin{cases} x' = x + 3y + t \\ y' = -y - \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

a) que verifique $x(1) = 2$ $y(1) = 7$

b) que verifique $x(1) = 0$ $y(1) = 0$

14. Sea A una matriz de $n \times n$ de números reales o complejos.

a) Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(Id + \frac{A}{n} \right)^n = e^A.$$

b) Probar que $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

Estabilidad

15. Halle los subespacios estables, inestables y centrales (E^s , E^u y E^c) del sistema lineal

$$x' = Ax \quad (2)$$

para las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En cada caso, también esboce el diagrama de fases. ¿Cuáles de estas matrices define un flujo hiperbólico, e^{At} ?

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sea $x(t)$ la solución de (2) con $x(0) = x_0$. Muestre que
- si $x_0 \in E^s - \{0\}$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = \infty$;
 - si $x_0 \in E^u - \{0\}$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$;
 - si $x_0 \in E^c - \{0\}$ y A es semisimple, entonces existen constantes positivas m y M tales que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $m \leq |x(t)| \leq M$.
17. Muestre que las únicas rectas invariantes para el sistema lineal (2) con $x \in \mathbb{R}^2$ son las líneas $ax + by = 0$ donde $v = (-b, a)$ es un autovector de A .

Sistemas No Autónomos

18. Pruebe el siguiente Teorema:

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sea $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ continua para $t \geq t_0$.

Probar que si todos los autovalores de A tienen parte real negativa y que si $\|B(t)\| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$), entonces las soluciones de

$$x' = Ax + B(t)x \quad (3)$$

verifican $x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) (y luego, 0 es asintóticamente estable).

19. Determine la estabilidad de $x = 0$ para el sistema (3) si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 & 0 \\ te^{-t^2} & t^2e^{-t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t^2} \end{pmatrix}.$$

20. Para qué valores de a es la solución $x = 0$ asintóticamente estable o inestable (ignore los casos con autovalores de parte real cero) para el siguiente sistema

$$x' = A(t)x$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2+1}{t^2} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t^{3/2}} & 0 & 1 + e^{-t} \\ (2-a)\frac{1-t}{t} & -1 & a\frac{1-t}{t} \end{pmatrix}.$$

21. **Fórmula de Liouville.** Sea $\varphi(t)$ una matriz cuyas columnas son las soluciones del sistema

$$x' = A(t)x, \quad (4)$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t))$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos son funciones continuas en un intervalo I . Probar que para todo $t \in I$ y $t_0 \in I$ fijo

$$\det(\varphi(t)) = \det(\varphi(t_0)) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}.$$

22. Sea $A(t)$ diferenciable y antisimétrica en un intervalo I y $\varphi(t)$ una matriz cuyas columnas son las soluciones del sistema (4). Probar que $\varphi(t)^T \varphi(t) = C$, donde $\varphi(t)^T$ es la transpuesta de $\varphi(t)$. Concluir que, si $\varphi(t_0)$ es ortogonal para algún $t_0 \in I$, entonces $\varphi(t)$ es ortogonal para todo $t \in I$.