Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primer Cuatrimestre - 2014

Práctica 2: Existencia y Unicidad de Soluciones

1. **Ecuación de Volterra.** Sean I, J dos intervalos alrededor de t_0 y sea U un entorno de x_0, y consideremos la siguiente ecuación integral - llamada la *ecuación de Volterra*-
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s))\, ds, \tag{1}$$
donde f es una función continua definida de $I \times J \times U$ en $\mathbb{R}$.

   a) Probar que si f es una función localmente Lipschitz en la tercer variable, la ecuación integral (1) admite solución única.

   b) Verificar que si $x\colon I \to U$ es continua y $\frac{\partial f}{\partial t}$ continua entonces $x \in C^1(I, U)$.

2. Sean u, v y w funciones continuas y positivas en el intervalo $[a, b]$ y
$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t u(s)v(s)\, ds, \quad \forall\ t \in [a, b].$$
Probar que:

   a)
$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t w(s)v(s)e^{\int_s^t v(\tau)\ d\tau}\ ds \quad \forall\ t \in [a, b].$$

   b) Si $w \equiv 0$ entonces $u \equiv 0$.

   c) Si w es una función creciente en $[a, b]$ entonces
$$u(t) \leq w(t)e^{\int_a^t v(s)\ ds} \quad \forall t \in [a, b].$$

   d) Si $w(t) = c_0 + c_1(t - a)$ y $v(t) = c_2$ donde c_0, c_1 y c_2 son constantes no negativas, entonces
$$u(t) \leq \left(c_0 + \frac{c_1}{c_2}\right) e^{c_2|t-a|} - \frac{c_1}{c_2}.$$

Existencia

3. Sean $t_0, a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $f(t, x)$ una función continua tal que
$$|f(t, x)| \leq c_1 + c_2|x|^\alpha$$
para todo $(t, x) \in T = \{(t, x)\colon |t - t_0| \leq a,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ donde $c_1, c_2 \geq 0$ son constantes y $0 < \alpha < 1$. Mostrar que el problema de valores iniciales
$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

tiene al menos una solución en el intervalo $|t - t_0| \leq a$.

Unicidad

4. Sean $a, b > 0$, t_0,$x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f(t, x)$ una función continua que satisface la condición de Lipschitz generalizada

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t)|x_1 - x_2|$$

para todo (t, x_1), (t, x_2) en $Q = \{(t, x)\colon |t - t_0| \leq a \text{ y } |x - x_0| \leq b\}$, donde $L(t)$ es una función positiva tal que la integral $\int_{t_0-a}^{t_0+a} L(s)\ ds$ existe. Mostrar que el problema de valores iniciales (2) tiene a lo sumo una solución en $|t - t_0| \leq a$.

5. **Teorema de Unicidad de Roger.** Sea $f(t, x)$ una función continua en la banda $T = [0, 1] \times \mathbb{R}$ que satisface la condición

$$f(t, x) = o\left(e^{-\frac{1}{t}} t^{-2}\right)$$

uniformemente para $-\delta \leq x \leq \delta$, donde $\delta > 0$ arbitrario. Además, para todo (t, x_1), (t, x_2) en T se tiene que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \frac{1}{t^2}|x_1 - x_2|.$$

Mostrar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

tiene a lo sumo una solución en $[0, 1]$.

6. **Intervalo Maximal.**

7. *a*) Encontrar la solución general de la siguiente ecuación

$$x' = \frac{2}{t^2 - 1}.$$

   b) Graficar la solución hallada en el ítem anterior.

8. Encontrar la solución general de la siguiente ecuación

$$x' = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

¿Cuál es el intervalo maximal de la solución hallada? Hacer el gráfico de la solución y compararlo con el hecho en el ejercicio anterior.

9. Probar que el problema
$$\begin{cases} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
tiene solución en el intervalo maximal $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Revisar la demostración de la existencia de solución de un problema de valores iniciales de la forma (2) vía Teorema del punto fijo, y deducir que si la condición de Lipschitz es global entonces la solución está definida para todo tiempo.

11. Sean x una solución maximal de (2) con f continua y Lipschitz en la segunda variable y (w_-, w_+) el intervalo maximal asociado a x. Entonces, si existe un compacto K tal que $x(t) \in K$ para todo $t \in (w_-, w_+)$ resulta que x está definida globalmente.

12. Sean $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y f Lipschitz. Probar que el sistema
$$\begin{cases} x' = f(x), & x(0) = x_0, \\ y' = g(x)y, & y(0) = y_0, \end{cases}$$
tiene solución única en cualquier intervalo donde esté definida. ¿Se puede quitar la hipótesis de que f sea Lipschitz?

Sistemas Autónomos

13. Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función globalmente Lipschitz. Demostrar que si x es una solución para la ecuación $x' = f(x)$ tal que existe $\tau \in \mathbb{R}$ de manera que $x(0) = x(\tau)$ entonces x es periodica.

14. Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Probar que el intervalo maximal de existencia de
$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$
es finito si y sólo si
$$\int^{\infty} \frac{1}{f(s)}\, ds < \infty.$$

15. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ localmete Lipschitz y x una solución de la ecuación $x' = f(x)$ con intervalo maximal (w_-, w_+). Probar que si existe el $\lim_{t \to w_+} x(t) = L < \infty$ entonces $L \in \partial U$ o $f(L) = 0$.

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua localmente Lipschitz para la cual eiste $a < b$ tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$.

    a) Demostrar que si $x(t)$ es la solución del problemas de valores iniciales
    $$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) \in (a, b). \end{cases}$$
    entonces $x(t) \in (a, b)$ para todo $t \in (w_-, w_+)$. En esta situación diremos que el conjunto (a, b) es invariante por el flujo.

b) Mostrar que las soluciones que comienza en $[a, b]$ están definidas globalmente.

17. Sea I un intervalo finito alrededor de $t_0 \in \mathbb{R}$ y K un entorno compacto de $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Sean, además, $f_n : I \times K \to \mathbb{R}^N$ una sucesión de funciones continuas que satisfacen la condición de Lipschitz en la segunda variable con constante L_n respectivamente y tal que $f_n \rightrightarrows f$. Consideremos, finalmente, las sucesiones $t_n \to t_0$ y $x_n \to x_0$ y la sucesión $x_n : I \to K$ de soluciones del problema de valores iniciales dado por

$$\begin{cases} u' = f_n(t, u) \\ u(t_n) = x_n. \end{cases}$$

Demostrar que si f no es localmente Lipschitz pero es acotada entonces existe una subsucesión $x_{n_k} \rightrightarrows x$ tal que el límite x satisface la ecuación integral.