

Práctica 1: Resolución de Ecuaciones de Primer Orden

1. **Separación de Variables.** Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, encontrar la solución general y la particular que satisfaga la condición dada:

a) $y' = \frac{1+y}{1+x}, y(0) = 1,$

d) $y' - 2xy = x, y(1) = 0,$

b) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, y(1) = 0,$

e) $(1+x^2)y' + e^{-y} = 0, y(0) = 0,$

c) $y' = (1+x)(1+y), y(0) = 1,$

f) $y' - y^{1/3} = 0, y(0) = 0.$

En todo los casos de el dominio de definición de la solución.

2. Comprobar que la sustitución $v = ax + by + c$ transforma la ecuación

$$y' = f(ax + by + c)$$

en otra de variables separadas. Aplicar este método para resolver

a) $y' = (x + y)^2,$

b) $y' = \text{sen}^2(x - y - 1).$

3. **Ecuaciones homogéneas.** Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0,$

d) $2xyy' = 4x^2 + 3y^2,$

b) $x \text{sen} \left(\frac{y}{x} \right) y' = y \text{sen} \left(\frac{y}{x} \right) + x,$

e) $xy' = y + (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}},$

c) $xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}},$

f) $y' = \frac{x-y}{x+y}.$

4. Dada la ecuación

$$y' = F \left(\frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \right).$$

a) Si $ae \neq bd$, encontrar constantes h, k tales que el cambio de variables $x = z - h, y = w - k$ transforma la ecuación anterior en otra homogénea.

b) Si $ae = bd$, encontrar un cambio de variables que reduzca la ecuación anterior a una de variables separadas.

c) Aplicar el método anterior en los siguientes ejemplos:

$$\text{I) } y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}, \quad \text{II) } y' = \frac{x + y + 4}{x + y - 6}, \quad \text{III) } y' = \frac{2x + 3y - 1}{4x + 4}.$$

5. Utilizar el cambio de variables $y = zx^r$, $r \in \mathbb{R}$, para resolver

$$\text{a) } y' = \frac{2 + 3xy^2}{4x^2y}, \quad \text{b) } y' = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}.$$

6. **Ecuaciones exactas.**

$$\begin{aligned} \text{a) } & (6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0, \\ \text{b) } & 4x - y + (6y - x)y' = 0, \\ \text{c) } & (2xy^2 + 3x^2)dx + (2x^2y + 4y^3)dy = 0, \\ \text{d) } & (1 + ye^{xy}) + (2y + xe^{xy})y' = 0, \\ \text{e) } & (e^x \sin y + \tan y)dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y)dy = 0. \end{aligned}$$

7. **Factor integrante.** Resolver las siguientes ecuaciones, encontrando un factor integrante:

$$\begin{aligned} \text{a) } & (4x + 3y^3)dx + 3xy^2dy = 0, \\ \text{b) } & (7x^4y - 3y^8) + (2x^5 - 9xy^7)y' = 0, \text{ (sugerencia hallar un factor integrante de la forma } x^n y^m), \\ \text{c) } & (3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0, \text{ sabiendo que admite un factor integrante que solo depende de } x + y^2. \end{aligned}$$

8. a) Dada la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (1)$$

demostrar que si

$$\frac{N_x - M_y}{M}$$

es una función que solo depende de la variable y , entonces

$$\rho(y) = \exp\left(\int \frac{N_x - M_y}{M} dy\right)$$

es un factor integrante para (1).

b) Resolver

$$\begin{aligned} \text{I) } & y^2 \cos x + (y + 5y \sin x)y' = 0, \\ \text{II) } & 2x dx + x^2 \cot y dy = 0, \end{aligned}$$

9. Comprobar que la ecuación diferencial

$$(y + xf(x^2 + y^2)) dx + (yf(x^2 + y^2) - x) dy = 0$$

en general no es exacta, pero admite un factor integrante de la forma $\frac{1}{x^2 + y^2}$.

10. Probar que la ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ admite un factor integrante de la forma $\mu(x^2 + y^2)$ si

$$\frac{M_y - N_x}{xN - yM}$$

depende solamente de $x^2 + y^2$.

11. **Ecuaciones lineales de primer orden.** Resolver las siguientes ecuaciones

a) $y' + y = \frac{1}{1 + e^{2x}},$

b) $xy' = 2y - x^3,$

c) $(1 + x^2)y' + 2xy = \frac{1}{\tan x}.$

12. Encontrar una solución de la ecuación

$$y' \operatorname{sen}(2x) = 2y + 2 \cos(x),$$

que permanezca acotada cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

13. Resolver las siguientes **ecuaciones de tipo Bernoulli**:

a) $xy' + y = x^4y^3,$

b) $xy^2y' + y^3 = x \cos(x),$

c) $xy' + y = xy^2.$

14. a) Demostrar que las ecuaciones del tipo

$$y' + P(x)y = Q(x)y \ln y$$

se resuelven mediante la sustitución $z = \ln y$.

b) Resolver $xy' = 2x^2y + y \ln y.$

15. La ecuación

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x) \tag{2}$$

es conocida como la **ecuación de Ricatti**.

- a) Mostrar que si y_1 e y_2 son 2 soluciones de la ecuación (2), entonces la $z = y_1 - y_2$ es solución de la ecuación de Bernoulli

$$z' + (P + 2y_2Q)z + Qz^2 = 0.$$

- b) Sabiendo que $y = x$ es una solución de la ecuación de Ricatti

$$y' + x^3y - x^2y^2 = 1$$

determinar las demás soluciones.

16. a) Mostrar que si y_1 e y_2 son dos soluciones de (2), entonces su solución general está dada por

$$y - y_1 = c(y - y_2) \exp\left(\int Q(y_2 - y_1)\right).$$

- b) Obtener la solución general de

$$y' - y \tan x - y^2 \cos x = -\frac{1}{\cos x}$$

sabiendo que $y_1 = \frac{1}{\cos x}$ e $y_2 = -\frac{1}{\cos x}$ son soluciones.

Algunas Aplicaciones

17. El siguiente problema describe una deducción muy precisa de la edad del uranio.

- a) Denotemos con $N_{238}(t)$ y $N_{235}(t)$ el número de átomos de U^{238} y U^{235} en tiempo t en una muestra de uranio, y tomamos como $t = 0$ el instante en que esta muestra fue creada. Por la ley de decaimiento radiactivo

$$\begin{aligned} N'_{238}(t) &= \frac{-\ln 2}{(4,5)10^9} N_{238}(t), \\ N'_{235}(t) &= \frac{-\ln 2}{(0,707)10^9} N_{235}(t). \end{aligned}$$

Resuelva estas ecuaciones para evaluar $N_{238}(t)$ y $N_{235}(t)$ en términos de los datos iniciales $N_{238}(0)$ y $N_{235}(0)$.

- b) En 2010 la relación de U^{238} y U^{235} en una muestra era de 137,8. Suponiendo que, en el momento de la creación de una muestra, aparecieron iguales cantidades de U^{238} y U^{235} , demuestre que la edad del uranio es de $5,96 \times 10^9$ años.
18. La propagación de una acción en una población grande (por ejemplo, comprar un automóvil llamativo) a veces depende sólo parcialmente de la tendencia humana

de imitar lo que los otros hacen. En este caso el incremento de la proporción $y(t)$ de población que ha realizado tal acción puede expresarse por la fórmula

$$y' = (1 - y)(s(t) + Iy),$$

donde $s(t)$ mide el estímulo externo e I es una constante llamada coeficiente de imitación. Hallar y ($y \neq 1$) cuando el estímulo externo crece uniformemente con el tiempo, de modo que $s(t) = at$ para una constante positiva a .

19. Fat Richie, un matón obeso del bajo mundo que pesaba 181 kilos, fue arrojado por la ventana de un departamento a 850 metros de altura sobre el suelo en la ciudad de Nueva York. Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, calcular
- la velocidad con la que Fat Richie llegó al piso;
 - el tiempo transcurrido antes del choque con el suelo.