Aritmética de Curvas Elípticas

1er. Cuatrimestre 2014

Guía 4 - Curvas elípticas sobre los racionales

1. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo, y miremos la curva elíptica
$$E_p : y^2 = x^3 + px$$
Hallar los puntos de torsión de E_p para cualquier valor de p.
2. Dada la curva elíptica
$$E : y^2 = x^3 + x$$
hallar todos los puntos racionales de E (en términos de generadores).
3. Recordar que si $E/\mathbb{Q}$ es una curva elíptica, y definimos el número
$$a_p = p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p).$$
La L-serie asociada a E la definimos por el producto de Euler
$$L(E,s) = \prod_{p|\Delta(E)} (1 - a_p p^{-s})^{-1} \prod_{p\nmid\Delta(E)} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}.$$
Probar que al expandir el producto como serie de Dirichlet $\sum_n c_n n^{-s}$, el coeficiente $c_p = a_p$.
4. Consideremos el producto de Euler
$$\prod_p \frac{1}{(1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})}$$
donde el producto es sobre todos los primos y a_p son números complejos tales que $|a_p| \leq p^c$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. Probar que el producto converge absolutamente para $\Re(s) > 1 + c$. Concluir que si E es una curva elíptica entonces $L(E,s)$ converge absolutamente para $\Re(s) > 3/2$.
5. Para cada una de las siguientes curvas elípticas calcular el grupo de puntos de torsión (estos son todos los posibles grupos que pueden aparecer por el Teorema de Mazur):
   a) $y^2 = x^3 - 2$.
   b) $y^2 = x^3 + 8$.
   c) $y^2 = x^3 + 4$.
   d) $y^2 = x^3 + 4x$.
   e) $y^2 - y = x^3 - x^2$.
   f) $y^2 = x^3 + 1$.
   g) $y^2 = x^3 - 43x + 166$.
   h) $y^2 + 7xy = x^3 + 16x$.
   i) $y^2 + xy + y = x^3 - x^2 - 14x + 29$.
   j) $y^2 + xy = x^3 - 45x + 81$.
   k) $y^2 + 43xy - 210y = x^3 - 210x^2$.
   l) $y^2 = x^3 - 4x$.
   m) $y^2 + xy - 5y = x^3 - 5x^2$.
   n) $y^2 + 5xy - 6y = x^3 - 3x^2$.
   ñ) $y^2 + 17xy - 120y = x^3 - 60x^2$.