Práctica 6 -Conexión, Baire-

"Cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento, más imperioso es el deseo de la vida por escapar de él hacia la libertad."
Hegel.

Conexión

Ejercicio 1. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$\{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < |x| < 2\}$; $\mathbb{N}$; $[0, 1)$; $\mathbb{Q}$; $\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$;

$B(a, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ en un espacio métrico (X, d).

Ejercicio 2.

i) Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cup B$ no sea conexo. Idem para $A \cap B$ y $A - B$.

ii) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ conexo y sea x un punto de acumulación de C. Probar que $C \cup \{x\}$ es conexo.

iii) Determinar la validez de las siguientes afirmaciones:

(a) Si C es conexo, entonces C° es conexo.

(b) Si C es conexo, entonces $\overline{C}$ es conexo.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

1. no existen U, V abiertos en C, no vacíos y disjuntos tales que $C = U \cup V$;
2. no existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X y disjuntos, de modo que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$;
3. si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C, entonces $A = C$.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 0, \dots, n-1$. Probar que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 6. Probar que un espacio métrico (X, d) es conexo si y sólo si toda función continua $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 7. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8.

i) Probar que si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua y suryectiva, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

ii) Sea (X,d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a,b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. ¿Vale la recíproca?

iii) Probar que si (X,d) es conexo, entonces $\sharp X = 1$ o $\sharp X \geq c$.

Ejercicio 9. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$

i) $\operatorname{arcsen}([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$.

ii) $\mathbb{Q}$.

iii) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1)$.

iv) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1) \cup \{(0,0)\}$.

Ejercicio 10. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$, y sea $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0,0),(0,1)\}$. Probar que:

i) $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X.

ii) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X, entonces $\{(0,0),(0,1)\} \subset B$ o $\{(0,0),(0,1)\} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados. Son abiertos?

Ejercicio 12. Probar que los siguientes conjuntos son totalmente disconexos:

i) Un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2.

ii) $\mathbb{Q}$.

iii) El conjunto de Cantor.

Arco-Conexión

Ejercicio 13. Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

i) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

ii) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

Ejercicio 14. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = f(x, y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

ii) $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n - B(0, 1)$.

iii) $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$.

iv) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Ejercicio 15. Sean (X, d) un espacio métrico arcoconexo, (Y, d') un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 16. Un espacio métrico (X, d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x, existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V de x tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

i) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo $\iff$ A es arcoconexo.

ii) Un espacio métrico es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de los abiertos son abiertas.

iii) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

iv) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.

v) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.

Ejercicio 17. En el espacio $(C[0, 1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0, 1] : f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in [0, 1]\}.$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.

Baire

Ejercicio 18. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 19. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 20. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \Big\{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists\, U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n}\Big\}.$$

Ejercicio 21. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0,1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0,1] \ / \ f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0,1], d_\infty)$.

ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 22. Sea (X,d) espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si $\overline{A}^\circ = \emptyset$.

1. Probar que si A es nunca denso, entonces $X - A$ es denso. ¿Vale el recíproco?
2. Probar que si A es abierto y denso, entonces $X - A$ es nunca denso.

Ejercicio 23. Sea (X,d) espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

1. A es nunca denso;
2. toda bola B abierta contiene otra $B_1 \subset B$ abierta tal que $B_1 \cap A = \emptyset$;
3. A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 24. Sea $Lip[a,b] = \{f \in C[a,b] / \ \exists k > 0, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\}$. Probar que $Lip[a,b]^\circ = \emptyset$ en $C[a,b]$.

Ejercicio 25. Probar que, si A es el conjunto de funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía, entonces A tiene interior vacío en $C[a,b]$.