

PRÁCTICA 5 -COMPLETITUD, CONTINUIDAD UNIFORME Y COMPACIDAD-

*“Cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento,
más imperioso es el deseo de la vida por escapar de él hacia la libertad.”*
HEGEL.

A. Completitud

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Probar que:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.
- ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
- iii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?
- iv) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.
- v) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Ejercicio 2. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X , entonces X es completo.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico.

- i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X .
- ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X .

Ejercicio 4. (Teorema de Cantor) Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 6.

- i) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada}\}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.
- ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.
- iii) Probar que $C_0 := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid a_n \rightarrow 0\}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$.

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X . Probar que X es completo.

B. Continuidad Uniforme

Ejercicio 8. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función que satisfice:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 9.

- i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que
 - (a) $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ y
 - (b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,entonces f no es uniformemente continua en A .
- ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en \mathbb{R} . ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?
- iii) Verificar que la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 10.

- i) Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X . Probar que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y .
- ii) Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 11.

- i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.
- ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 12. Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subset X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.

Ejercicio 13. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subset X$ denso y sea $f : D \rightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X , es decir, existe una única función $F : X \rightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).

C. Conjuntos Perfectos

Ejercicio 14. Sea \mathcal{C} el conjunto de Cantor.

- i) Probar que \mathcal{C} es cerrado y acotado (luego compacto).
- ii) Probar que \mathcal{C} es perfecto (i.e. $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$).
- iii) Probar que \mathcal{C} tiene interior vacío.
- iv) Probar que $x \in \mathcal{C}$ si y sólo si su desarrollo en base 3 tiene sólo las cifras 0 y 2.
- v) Probar que \mathcal{C} tiene la potencia del continuo.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Probar que si $P \subseteq X$ es perfecto entonces es no numerable.

Ejercicio 16.

- i) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y no numerable. Sea T el conjunto de puntos de condensación de S (que por el ejercicio 4 de la práctica 3 es no vacío). Probar que:
 - (a) $S - T$ es numerable.
 - (b) $S \cap T$ es no numerable.
 - (c) T es un conjunto cerrado.
 - (d) T no posee puntos aislados.
- ii) (Teorema de Cantor-Bendixon) Probar que cualquier conjunto F cerrado no numerable de \mathbb{R}^n puede expresarse en la forma $F = A \cup B$, donde A es perfecto y B es numerable.

D. Compacidad

Ejercicio 17.

- i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es compacto.
- ii) Mostrar que el intervalo $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.
- iii) Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de (\mathbb{Q}, d) , donde d es la métrica euclídea de \mathbb{R} .

Ejercicio 18.

Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 19. Sea $A = \{a^{(n)} \in \ell^\infty / n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ está definida por

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ 1 & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Probar que A es discreto, cerrado y acotado; pero no compacto.

Ejercicio 20. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in I}$ de un espacio métrico (X, d) , un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i \in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i \in I}$ tiene intersección no vacía. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es compacto;
2. toda familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la P.I.F. tiene intersección no vacía;
3. todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X ;
4. X es secuencialmente compacto (es decir, toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente);
5. X es completo y totalmente acotado.

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que:

- i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.
- ii) Si (X, d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.
- iii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 23. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| / n \in \mathbb{N}\}.$$

- i) Demostrar que la bola cerrada $\bar{B}(x, 1) = \{y \in C_0 / d(x, y) \leq 1\}$ no es compacta.
- ii) Probar que (c_0, d) es separable.

Ejercicio 24. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X, d) e (Y, d') son compactos.

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico.

- i) Sean $K \subset X$ un compacto y sea $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia entre x y K "se realiza".
- ii) Sean $F, K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva.
- iii) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 "se realiza".

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X / K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

- i) Sea $\tilde{d}(A, B) = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}$. Verificar que \tilde{d} no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.
- ii) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ como $\delta(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\delta(A, B) < \varepsilon \iff A \subset B(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A, \varepsilon),$$

donde $B(C, \varepsilon) = \{x \in X / d(x, C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$.

- iii) Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 27. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X, d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 28. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d') , la proyección $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 29. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$, entonces f es continua.

Ejercicio 30.

- i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.
- ii) Deducir que \sqrt{x} es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- iii) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en \mathbb{R} .

Ejercicio 31. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ compacto. Probar que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 32. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

- i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.
- ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.
- iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Ejercicio 33. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X .

Ejercicio 34. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso, y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión a todo X . ¿ Puede \mathbb{R} reemplazarse por \mathbb{R}^k ? ¿ Por cualquier espacio métrico compacto? ¿ Por cualquier espacio completo? ¿ Por cualquier espacio métrico?