

## PRÁCTICA 10 -DIFERENCIACIÓN-

*"Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas."*  
ALBERT EINSTEIN

*"La inspiración es necesaria en geometría, tanto como en poesía."*  
ALEKSANDR PUSHKIN

## Diferenciación

**Ejercicio 1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable tal que  $f'$  es acotada. Probar que  $f$  es uniformemente continua.

**Ejercicio 2.** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y derivable en  $(a, b) \setminus \{x_0\}$ . Supongamos además que los límites laterales de  $f'$  en  $x_0$  existen y son finitos. Probar que:

- i)  $f$  es derivable lateralmente en  $x_0$ . Más aún, si ambos límites laterales coinciden, entonces  $f$  es derivable en  $x_0$ ; determine  $f'(x_0)$  en ese caso.
- ii) Los resultados de la parte anterior dejan de ser válidos si se omite la hipótesis de continuidad de  $f$  en  $x_0$ .

**Ejercicio 3.** Sean  $\alpha < a < b < \beta$  y  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable en  $(\alpha, \beta)$  tal que  $f'(a) \neq f'(b)$ . Probar que:

- i) Si  $f'(a) < 0 < f'(b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .
- ii) Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  es tal que  $f'(a) < \lambda < f'(b)$ , entonces existe  $d \in (a, b)$  tal que  $f'(d) = \lambda$ .
- iii) Si  $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  está definida por

$$g(t) = \begin{cases} (t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t}, t^2 \operatorname{cos} \frac{1}{t}) & \text{si } 0 < t < 1, \\ (0, 0) & \text{si } -1 < t \leq 0, \end{cases}$$

entonces  $g$  es derivable en  $(-1, 1)$  pero  $g'((-1, 1))$  no es conexo.

**Ejercicio 4.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto no vacío y sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Probar que si  $f$  es diferenciable en  $x_0$ , entonces existen  $\delta > 0$  y  $c \geq 0$  tales que  $B(x_0, \delta) \subseteq A$  y  $\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\|$  para todo  $x \in B(x_0, \delta)$ .

**Ejercicio 5.** Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  y sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto que contiene al segmento  $S$  que une  $x_1$  y  $x_2$ . Mostrar que:

- i) Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, entonces existe  $x$  en el segmento  $S$  tal que  $f(x_1) - f(x_2) = Df(x)(x_1 - x_2)$ .
- ii) Sin embargo, esto es falso para una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
- iii) Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función diferenciable tal que  $\|Df(x)\| \leq M$  para todo  $x \in A$ , entonces  $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto conexo y sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable. Probar que si  $Df(x) = 0$  para todo  $x \in A$ , entonces  $f$  es constante en  $A$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto conexo y sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$$

para cada par de puntos  $x, y \in A$ . Probar que  $f$  es constante.

**Ejercicio 8.** Probar que una función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y con derivadas parciales acotadas es continua.

---

### Teoremas de la Función Inversa y de la Función Implícita

---

**Ejercicio 9.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función tal que

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Probar que  $f'(0) = 1$  y  $f'$  es acotada en  $(-1, 1)$ , pero sin embargo  $f$  no es biyectiva en ningún entorno de 0. En particular, la continuidad de  $f'$  en el punto es necesaria en el teorema de la función inversa.

**Ejercicio 10.** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función tal que  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ . Probar que:

- i)  $f$  no es inyectiva.
- ii) El jacobiano de  $f$  es no nulo en todo punto de  $\mathbb{R}^2$ , de manera que  $f$  es localmente inyectiva.

**Ejercicio 11.** Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  con jacobiano no nulo en todo  $U$ . Probar que:

- i)  $f$  es abierta.
- ii) Para cada  $y \in \mathbb{R}^n$  el conjunto  $f^{-1}(y)$  es discreto en  $U$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $(1, 2, 0)$  es solución de la ecuación  $f(xz, y - 2x) = 0$ .

- i) Determinar condiciones suficientes para que existan un entorno  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  de  $(1, 0)$  y una función  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tales que  $\phi(1, 0) = 2$  y

$$F(xz, \phi(x, z) - 2x) = 0 \text{ para todo } (x, z) \in W.$$

- ii) Mostrar que

$$x \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) - y \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) = 2x \text{ en } W.$$

**Ejercicio 13.** Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x - y^2 + z^3 = 0, \\ -\log(1+x) + y^2 z = 1, \end{cases}$$

define dos funciones  $y = y(x)$  y  $z = z(x)$  en un entorno del punto  $(0, 1, 1)$ . Sean  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en forma paramétrica por  $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ , y la función  $g(x, y, z) = 2xyz + z \tan x$ . Calcular la derivada direccional de  $g$  en  $(0, 1, 1)$  según el vector tangente a  $\alpha$  en el punto  $x = 0$ .