

PRÁCTICA 8: TEOREMA DE RADON-NIKODYM Y MEDIDAS DE PROBABILIDAD

Ejercicio 1. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas sobre el espacio medible (X, Σ) , tal que por lo menos una de ellas es finita. Si $\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$, ($E \in \Sigma$), probar que ν es una medida con signo.

Ejercicio 2. Sea ν una medida con signo. Probar:

- (a) Si P es un conjunto positivo con respecto a ν y $A \subset P$, entonces A es un conjunto positivo con respecto a ν .
- (b) Si $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ son conjuntos positivos con respecto a ν , entonces $\bigcup_{i=1}^n P_i$ también lo es.

Ejercicio 3. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) . Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $\Omega = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Dado $E \in \mathcal{F}$, probar:

- (a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\}$,
- (b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\}$.

Ejercicio 4. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y f tal que existe $\int_{\Omega} f d\mu$. Si $\nu(E) = \int_E f d\mu$, $E \in \mathcal{F}$, probar que:

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$$

Ejercicio 5.

- (a) Sean λ y μ medidas sobre (Ω, \mathcal{F}) y $\lambda(\Omega) < \infty$. Probar:

$$\lambda \ll \mu \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \mu(E) < \delta \implies \lambda(E) < \epsilon.$$

- (b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(\Omega) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0, 1)$ medible Lebesgue.)

Ejercicio 6. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \delta)$ donde \mathcal{M} es la σ -álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

- (a) Probar que no existe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x) dx \quad (\forall A \in \mathcal{M}).$$

- (b) Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ .

Ejercicio 7. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio medible (X, Σ) . Si para todo $\epsilon > 0$ existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset, \quad A_\epsilon \cup B_\epsilon = X, \quad \mu(A_\epsilon) < \epsilon \text{ y } \nu(B_\epsilon) < \epsilon,$$

probar que existen $A \in \Sigma, B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = X, \quad \mu(A) = 0 = \nu(B).$$

Ejercicio 8. Sea μ la medida de contar en \mathbb{R} y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe f tal que

$$m(E) = \int_E f d\mu.$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Radon-Nikodym?

Ejercicio 9. Sean (Ω, \mathcal{F}) un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada finita definidas en \mathcal{F} , tales que $\nu \ll \mu$.

- (a) Probar que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int f d\nu = \int fg d\mu \quad \forall f \text{ medible tal que } \int f d\nu \text{ existe.}$$

- (b) Probar que $\{x \in \Omega : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in \Omega : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν .

Ejercicio 10. Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible y sean μ y ν dos medidas finitas en (Ω, \mathcal{F}) . Definimos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por $\bar{\mu} = \mu + \nu$.

- (a) Probar que existe una función $f \in L^1(\bar{\mu})$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\bar{\mu}$ y que $0 \leq f \leq 1$ $\bar{\mu}$ -a.e.

- (b) Deducir que $\int g d\nu = \int gf d\bar{\mu}$ para toda $g \geq 0$ medible.

- (c) Si, además, $\nu(E) = \int_E h d\mu$ para todo $E \in \mathcal{F}$ entonces $h = \frac{f}{1-f} \mu$ -a.e.

Sugerencia: reescribir el ítem (b) como $\int g(1-f)d\nu = \int gf d\mu$ y elegir una g adecuada.

Ejercicio 11. Sea μ una medida de Borel finita sobre \mathbb{R} y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mu(-\infty, x]$. Probar:

- (a) $\mu \ll m$ si y solo si f es absolutamente continua y en ese caso $\frac{d\mu}{dm} = f'$.
- (b) $\mu \perp m$ si y solo si $f' = 0$ a.e.

Ejercicio 12. Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y una función medible $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, considerar la medida μ_X definida sobre los borelianos de \mathbb{R}^n , por

$$\mu_X(A) := \mu(X^{-1}(A)) .$$

Probar que para toda función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable respecto de μ_X , y para todo boreliano $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ vale,

$$\int_A f(y) d\mu_X = \int_{X^{-1}(A)} f(X) d\mu .$$

Ejercicio 13. Sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un vector aleatorio y P_{XY} la medida inducida por (X, Y) sobre los borelianos de \mathbb{R}^2 . Probar que si $P_{XY} \ll m$, siendo m la medida de Lebesgue, entonces P_X y P_Y también lo son y hallar sus funciones de densidad, esto es, sus derivadas de Radon-Nikodym respecto de m .

Ejercicio 14. Sea $X = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_i son todos distintos, los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos y $\Omega = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Sea $\sigma(X)$ la σ -álgebra generada por X .

- (a) Describir precisamente los conjuntos que componen $\sigma(X)$.
- (b) Probar que si la variable aleatoria Y es $\sigma(X)$ -medible entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_i . Concluir que Y puede expresarse como función de X .

Ejercicio 15. Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, \mathcal{B} la σ -álgebra de los borelianos de Ω y P la medida de Lebesgue. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Definimos en (Ω, \mathcal{B}, P) las siguientes variables aleatorias

$$X_1(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_1), \quad X_2(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_2).$$

Probar que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas.

Ejercicio 16.

- (a) Dados un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{U}, P) y una función medible $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $\int_{\Omega} f dP = 1$, sea ν la medida definida sobre (Ω, \mathcal{U}) por

$$\nu(A) = \int_A f dP .$$

Probar que $(\Omega, \mathcal{U}, \nu)$ es un espacio de probabilidad y que para toda $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ν -integrable, vale que

$$\int_{\Omega} g d\nu = \int_{\Omega} g f dP .$$

- (b) En particular, sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una variable aleatoria y supongamos que μ_X tiene función de densidad f . Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$Y = g(X)$$

es integrable. Mostrar que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x) dx.$$

Ejercicio 17. Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Hallar

- (a) $E(X|\mathcal{V})$ con $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega\}$
 (b) $E(X|\mathcal{V})$ con $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$, $B \in \mathcal{F}$
 (c) $E(X|Y)$ con Y una variable aleatoria que toma los valores y_i con probabilidad p_i , $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 18. Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$. Probar que

$$E(X|Y) = \Phi(Y), \quad \text{con} \quad \Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx.$$

Sugerencia:

- (a) $\Phi(Y)$ es $\sigma(Y)$ -medible.
 (b) Sea $A \in \sigma(Y)$ y sea B un boreliano de \mathbb{R} tal que $A = Y^{-1}(B)$.

Probar que

1. $\int_A X dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B x f_{XY}(x, y) dy dx.$
2. $\int_A \Phi(Y) dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B \Phi(y) f_{XY}(x, y) dy dx.$
3. $\int_A X dP = \int_A \Phi(Y) dP$, para todo $A \in \sigma(Y)$.