Práctica 6: Espacios L^p y Cambio de Variable

Ejercicio 1. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $E \in \Sigma$ un conjunto de medida finita y $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$.

(a) Probar que $L^{p_2}(E, d\mu) \subseteq L^{p_1}(E, d\mu)$.

(b) Mostrar que $\mu(E) < \infty$ es una condición necesaria para la inclusión.

Ejercicio 2. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $1 \leq r \leq p \leq s < \infty$. Si $f \in L^r(X, d\mu) \cap L^s(X, d\mu)$, entonces $\|f\|_p^p \leq \|f\|_r^r + \|f\|_s^s$.

Ejercicio 3. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Probar que:

(a) Si $f_n \to f$ en $L^p(X, d\mu)$, para algún $p : 1 \leq p \leq \infty$, entonces $f_n \to f$ en medida.

(b) Si $f_n \to f$ en $L^p(X, d\mu)$, $g_n \to g$ en $L^q(X, d\mu)$, y $1/p + 1/q = 1$, entonces $f_n g_n \to fg$ en $L^1(X, d\mu)$.

(c) Si $\mu(X) < \infty$ y $f_n \to f$ en $L^\infty(X)$, entonces $f_n \to f$ en $L^p(X, d\mu)$, para todo $p \geq 1$.

(d) Si $f_n \to f$ en L^p, $1 \leq p < \infty$, $g_n \to g$ a.e. y $\|g_n\|_\infty \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, probar que $f_n g_n \to fg$ en L^p.

Ejercicio 4. Dadas las funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n = \begin{cases} e^n, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

probar que $f_n \to 0$ a.e. y $f_n \to 0$ en medida pero f_n no converge en $L^p([0, 1])$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Ejercicio 5. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $(f_n)_{n \geq 1}$ y f en $L^p(X, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Probar:

(a) $\|f_n - f\|_{L^p(X, d\mu)} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_{L^p(X, d\mu)} \to \|f\|_{L^p(X, d\mu)}$.

(b) Si $f_n \to f$ a.e. sobre X entonces:

$$\|f_n\|_{L^p(X, d\mu)} \to \|f\|_{L^p(X, d\mu)} \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^p(X, d\mu)} \to 0.$$

(Sug.: Aplicar el Lema de Fatou a la sucesión: $g_n(x) = 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) - |f_n(x) - f(x)|^p$.)

Ejercicio 6. Sea $k : \mathbb{R}^{d+d} \to \mathbb{R}$ medible tal que existe $c > 0$ que verifica:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int |k(x, y)| dy \leq c \quad \text{y} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int |k(x, y)| dx \leq c.$$

Probar que si $1 < p < \infty$, entonces $K : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ dada por

$$K(f)(x) = \int k(x,y) f(y) dy$$

está bien definida y es uniformemente continua.

Ejercicio 7. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $E \in \Sigma$ tal que $0 < \mu(E) < \infty$. Para $1 \leq p < \infty$ y f medible, definimos:

$$N_p[f] = \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f|^p \right)^{1/p}.$$

Probar:

(a) $p_1 < p_2 \;\Rightarrow\; N_{p_1}[f] \leq N_{p_2}[f]$.

(b) $N_p[f+g] \leq N_p[f] + N_p[g]$.

(c) $\frac{1}{\mu(E)} \int_E |fg| \leq N_p[f] N_q[g],\; 1/p + 1/q = 1$.

(d) $\lim_{p\to\infty} N_p[f] = \|f\|_\infty$.

(e) Sea $f \in L^\infty(E)$, $\|f\|_\infty > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $a_n = \int_E |f(x)|^n d\mu$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \|f\|_\infty$.

Ejercicio 8. Demuestre la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder.
Si $\sum_{i=1}^k 1/p_i = 1/r$, $p_i, r \geq 1$, entonces

$$\|f_1 \cdots f_k\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}$$

Ejercicio 9. Muestre que cuando $0 < p < 1$, los entornos $\{f \in L^p(0,1) : \|f\|_p < \varepsilon\}$ de la función nula, no son convexos.

Ejercicio 10. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f medible sobre X y

$$\omega(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})$$

(a) Supongamos que para todo $\alpha > 0$, $\omega(\alpha) \leq c(1+\alpha)^{-p}$. Probar que $f \in L^r(X, d\mu)$, para $0 < r < p$.

(b) Probar que $f \in L^p(X, d\mu)$ $(0 < p < \infty)$, si y sólo si

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \omega(2^k) < +\infty.$$

Mostrar además que existen constantes positivas c_1 y c_2 que no dependen de f tales que:

$$c_1 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \omega(2^k) \right)^{1/p} \;\leq\; \|f\|_p \;\leq\; c_2 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \omega(2^k) \right)^{1/p}.$$

Ejercicio 11. Sea $E = [0, 1/2]$. Probar:

(a) $f(x) = x^{-1/p}(\ln x^{-1})^{-2/p} \in L^p(E)$, $(1 \leq p < \infty)$, pero $f \notin L^r(E)$ si $r > p$.

(b) $g(x) = \ln x^{-1} \in L^p(E)$ para todo $p : 1 \leq p < \infty$, pero $g \notin L^\infty(E)$.

Ejercicio 12. Sea $E = [0, \infty)$. Probar que $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^2(E)$ pero $f \notin L^p(E)$ para ningún $p : 1 \leq p < \infty$, y $p \neq 2$.

Ejercicio 13. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p < \infty$, probar que:

(a) $\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{1/p} \longrightarrow_{\|h\|\to\infty} 2^{1/p}\|f\|_p$

(b) $\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) + f(x)|^p dx\right)^{1/p} \longrightarrow_{\|h\|\to 0} 2\|f\|_p$

Ejercicio 14.

(a) Dadas funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ donde $1/p + 1/q = 1$, probar que la convolución $f * g(x)$ existe y es finita para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Además define una función acotada y uniformemente continua.

(b) Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $0 < |E| < \infty$, probar que:

$$E \; - \; E = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un conjunto abierto no vacío. (Sug.: considerar $\chi_E * \chi_{-E}$.)

Ejercicio 15. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable, para cada $h > 0$ sea

$$f_h(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f(x)dx.$$

Si $f \in L^p$, probar que:

(a) $\|f_h\|_\infty \leq h^{-1/p}\|f\|_p$.

(b) $f_h \in L^p$ y $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$.

(c) Para cada $r \geq p \geq 1$, $\|f_h\|_r \leq h^{1/r-1/p}\|f\|_p$.

(d) $\|f_h - f\|_p \longrightarrow_{h\to 0} 0$.

Ejercicio 16. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f \in L^p(X, d\mu)$, $0 < p < \infty$. Si $1/p + 1/q = 1$ probar:

(a) $\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q=1} \left|\int_X f(x)g(x)d\mu\right|$.

(b) Si $(f_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión de funciones en L^p tal que para toda $g \in L^q$ resulta: $\lim_{k\to\infty} \int_X f_k g dx = \int_X f g d\mu$, entonces:

$$\|f\|_p \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p.$$

Ejercicio 17. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $p \geq 1$. Definimos:

$$L^p_*(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ medible} : \sup_{t>0} t\,(|\{x \in X : |f(x)| > t\}|)^{1/p} < \infty\}.$$

Probar:

(a) $L^p(X) \subseteq L^p_*(X)$,

(b) Si $\mu(X) < \infty$ y $p > 1$, entonces $L^p_*(X) \subseteq L^1(X)$.

Ejercicio 18.

(a) Probar que para cualquier función medible no negativa $f(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ vale,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r\text{cos}\theta, r\text{sen}\theta) r\, dr d\theta$$

(b) Probar,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Ejercicio 19. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y sea $Q(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = xAx^t$. Probar que la función $f(x) = e^{-Q(x)}$ es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ si y sólo si todos los autovalores de A son positivos. Probar, además, que en tal caso

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Ejercicio 20. Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función radial si existe $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(\|x\|)$. Probar que existe una constante C_n tal que para toda función radial f vale que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = C_n \int_0^{\infty} r^{n-1} g(r)\, dr$$

Ejercicio 21. ¿Para qué valores de p es $\|x\|^p$ integrable sobre la bola unitaria $\{\|x\| \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^n$?

Ejercicio 22. Calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dx$$