Práctica 5: Medidas Producto-Teorema de Fubini

Ejercicio 1. Sean (X_1, Σ_1) y (X_2, Σ_2) espacios medibles y sea $P_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$, $i = 1, 2$, la proyección sobre X_i dada por $P_i(x_1, x_2) = x_i$.

(a) Probar que si $E_i \in \Sigma_i$ entonces $P_i^{-1}(E_i) \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

(b) Probar que si Σ es una σ-álgebra en $X_1 \times X_2$ tal que $P_i^{-1}(E_i) \in \Sigma$ para todo $E_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$, entonces $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \subset \Sigma$.

Ejercicio 2. Notemos con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Probar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Ejercicio 3.

(a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula.

(b) Sea $f(x, y)$ una función medible y no negativa definida sobre $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y. Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x.

Ejercicio 4. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de probabilidad. Sea $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tal que para todo $y \in Y$, $\mu(E_y) = 0$ o $\mu(E_y) = 1$. Si $B = \{y \in Y : \mu(E_y) = 1\}$, probar que $\mu \times \nu(E \bigtriangleup X \times B) = 0$.

Ejercicio 5. Sean f y g funciones medibles definidas sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ es medible.
Deducir que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$ es medible en $\mathbb{R}^{n+m}$ y $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

Ejercicio 6. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ medible y sea $h : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$. Probar que si h es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

Ejercicio 7. Sea $I = [0, 1]$ y sea $E \subseteq I \times I$ tal que $|E_x|_e = |I - E_y|_e = 0$ para todo $(x, y) \in I \times I$. Probar que E no es medible.

Ejercicio 8. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $E \in \Sigma$ y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y no negativa. Definimos

$$O_E(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : \ 0 \leq t < f(x)\}.$$

Probar:

(a) Si f es una función simple entonces $O_E(f) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Si $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión creciente de funciones medibles y no negativas que convergen a f entonces $O_E(f_n) \nearrow O_E(f)$. Deducir que $O_E(f)$ es medible.

(c) Probar que $\int_E f(x) d\mu = (\mu \times m) O_E(f)$, donde m denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 9. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $E \in \Sigma$ y f una función medible no negativa definida sobre E. Para cada $\alpha > 0$, se define

$$\omega(\alpha) = \mu(\{x \in E : f(x) > \alpha\}).$$

La función ω se llama *la función de distribución de f sobre E*. Probar que

(a) $\omega : [0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función decreciente.

(b) $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.

(c) $\omega(\alpha-) \geq \mu(\{x \in E : f(x) \geq \alpha\})$.

(d) ω continua en $\alpha \Rightarrow \mu(\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}) = \mu(\{x \in E : f(x) > \alpha\})$.

(e) Para cada $\alpha \in [0, \infty)$, $\{x : (x, \alpha) \in O_E(f)\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$.

(f) $\int_E f d\mu = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$. (Sug. Usar el ej. 8 y el teorema de Tonelli)

(g) Para cada $p : 0 < p < \infty$,

$$\int_E f^p d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

Ejercicio 10. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ medible tal que para algún $\alpha \in (0, 1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha/(1 + t)$ para todo $t \geq 0$. Consideramos la función $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, definida por $G(x, t) = e^{-xt} f(t)$. Probar que

(a) G es medible.

(b) $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$.

Ejercicio 11. Sea $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $k(x, y) = x.y$. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $h(x, y) = f(x.y)$ es medible.

Ejercicio 12. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles. Probar que la función $h(x) = |(A - x) \cap B|$ es medible y $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = |A||B|$.

Ejercicio 13. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

Ejercicio 14. Sean f y g funciones medibles sobre $\mathbb{R}^n$.

(a) Probar que la función $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ es medible sobre $\mathbb{R}^{2n}$.

(b) Se define la *convolución de f y g* por medio de la fórmula

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

en cada x donde la integral exista.

Si f y g son integrables sobre $\mathbb{R}^n$, probar que $f*g$ existe en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$,es integrable sobre $\mathbb{R}^n$ y se satisface

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1 .$$

Ejercicio 15. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, la función $e^{-2\pi i <\xi,x>} f(x)$ es medible e integrable.

Se define la *Transformada de Fourier de f* como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i <\xi,x>} f(x)dx, \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

(b) Probar que

(i) $\hat{f}$ es acotada y uniformemente continua.

(ii) Si $n = 1$, $\hat{f}(\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. (*Lema de Riemann-Lebesgue*).

(iii) Si $f(x) = f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)$, donde cada $f_k(x_k) \in L^1(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq n$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1)\ldots\hat{f}_n(\xi_n)$.

(iv) Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrable y tal que $f(x) = 0$, para todo $x \notin [a,b]$. Se define

$$g(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

Probar que

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Ejercicio 17. Sean $F \subseteq [a,b]$ un compacto ($a, b \in \mathbb{R}$) y $\lambda > 0$. Notamos con $d(x,F)$ la distancia a F de un punto $x \in \mathbb{R}$. Para $x \in [a,b]$, sea

$$M_\lambda(x) := \int_a^b \frac{d(y,F)^\lambda}{|x-y|^{1+\lambda}}dy.$$

Probar que M_λ es medible e integrable sobre F. Probar además la estimación

$$\int_F M_\lambda(x)dx \leq \frac{2}{\lambda}\,|[a,b] \setminus F| .$$

Ejercicio 18. Probar que:

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-tx}dt = 1/x$, para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \frac{sen(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.