Práctica 4: Integral de Lebesgue

Ejercicio 1. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea f definida sobre $E \in \Sigma$ una función medible y no negativa. Probar que

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi d\mu, \quad 0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi \text{ simple} \right\}.$$

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible, $v \in \mathbb{R}^n$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible.

(a) Probar que si $f \geq 0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

Concluir que

$$\int_E f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx$$

(b) Si f es integrable sobre $\mathbb{R}^n$, valen para f las mismas afirmaciones.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que para todo $a > 0$ vale

$$\int_{R^n} f\left(\frac{x}{a}\right) dx \quad = \quad a^n \int_{R^n} f(x)dx.$$

Ejercicio 4. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $E \in \Sigma$ y sea f integrable sobre E. Probar que si $\left|\int_E f d\mu\right| = \int_E |f| d\mu$, entonces $f \geq 0$ a.e. en E ó $f \leq 0$ a.e. en E.

Ejercicio 5. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $E \in \Sigma$ y sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible tal que $\int_A f d\mu = 0$ para todo conjunto medible $A \subseteq E$. Probar que $f = 0$ a.e. en E.

Ejercicio 6. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones integrables sobre (X, Σ, μ) . Probar que si $\int_X |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, entonces $f_n \overset{\mu}{\rightarrow} f$ sobre X. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 7.

(a) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que existe $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

(b) Mostrar que existen g continua e integrable sobre $[0, +\infty)$, y una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$, tales que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \infty.$$

Ejercicio 8.

(a) Sea $(\mathbb{R}^n, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida. Sea f integrable sobre $\mathbb{R}^n$ y $Q_k = [-k, k]^n$, $k \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int_{Q_k^c} |f| d\mu \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

(b) Sea f integrable sobre el espacio de medida (X, Σ, μ). Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto de medida finita A_ϵ tal que

$$\int_{A_\epsilon^c} |f| d\mu < \epsilon.$$

Ejercicio 9. Mostrar que en el Lema de Fatou :

(a) la desigualdad puede ser estricta.

(b) la hipótesis de que las funciones de la sucesión sean no negativas, es necesaria.

Ejercicio 10. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre $E \in \Sigma$. Si $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para cada $x \in E$ y $f_k \leq f$ a.e., probar que

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_k d\mu.$$

Ejercicio 11.

(a) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, y sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión decreciente de funciones medibles y no negativas definidas sobre X con $f_1 \in L^1(X, \mu)$. Mostrar que

$$\int_X \lim_{k\to\infty} f_k d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu < \infty.$$

(b) Sea $x \in \mathbb{R}_{>1}$. Mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln x,$$

considerando la sucesión $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}$ para $1 < t < x$.

Ejercicio 12. Si $f \in L^1(0, 1)$, mostrar que $x^n f(x) \in L^1(0, 1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Ejercicio 13. Probar que para cada $g \in L^1([0, \infty))$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n x g(x) dx = 0.$$

Ejercicio 14. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles y g integrable tales que para todo $n \in \mathbb{N}$,$|f_n| \leq g$ a.e., y $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ a.e.. Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en medida.

Ejercicio 15. Sea $g(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, definida en $(0, 1)$ y f su derivada. Probar que f es continua en $(0, 1)$, existe $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 f(x)dx$, pero $f \notin L^1(0, 1)$.
(Sug.: $|f(x)| \geq (2/x)|\cos(1/x^2)| - 2x \geq 1/2x$ para x tal que $[(2n + 1/3)\pi]^{-1/2} \leq x \leq [(2n - 1/3)\pi]^{-1/2}, n \in \mathbb{N}$).

Ejercicio 16. Sea (X, Σ, μ)un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty.$$

Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente en casi todo punto de E y

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Ejercicio 17. Sean $f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}; f_n(x) = nx^{n-1} - (n + 1)x^n$. Probar que

$$\int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n.$$

Verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} |f_n| = \infty.$$

Ejercicio 18. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $f : X \to \mathbb{R}$ medible, y $E \in \Sigma$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$.

(a) Probar que si f integrable sobre E, entonces $\sum\limits_{n\geq 1} |E_n| < \infty$.

(b) Probar que si E es de medida finita y $\sum\limits_{n\geq 1} |E_n| < \infty$ entonces f es integrable sobre E.

Ejercicio 19. Sea $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ no negativa e integrable sobre $[0, 1]$. Probar que si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 g(x)^n dx = \alpha,$$

entonces $g = \chi_E$ a. e. para algún conjunto $E \subseteq [0, 1]$ medible.

Ejercicio 20. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles tales que $f_n \overset{\mu}{\to} f$ sobre E. Si existe g integrable sobre E tal que para todo n $|f_n| \leq g$ a.e. sobre E, entonces f es integrable sobre E y $\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Ejercicio 21. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que:

1. para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto f(x,y)$ es integrable sobre $[0,1]$ y
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es una función de (x,y) acotada.

Probar que

(a) para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es medible y

(b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$.

Ejercicio 22. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.

(a) Si $\int\limits_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu \longrightarrow 0$ probar que $f_n \overset{\mu}{\to} 0$.

(b) Si $\mu(X) < \infty$ y $f_n \overset{\mu}{\to} 0$, probar que $\int\limits_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|} d\mu \longrightarrow 0$.

Ejercicio 23. Sean $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = \sharp(A)$. Probar que $f \in L^1(\mathbb{N}, \mu)$ si y sólo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso $\int_X f d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.