Práctica 3: Funciones Medibles

Ejercicio 1. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Notemos con B a la $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Probar:

(a) Si f es una función medible entonces $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para todo $B \in$ B .

(b) Si $\overline{\text{B}} = \{E = B \cup A,\ B \in \text{B} \text{ y } A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces, f es medible si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\text{B}}$.

Notación. En lo que sigue $\mathbb{R}^d$ denota el espacio de medida $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}, m\right)$, siendo $\mathcal{M}$ la $\sigma-$álgebra de Lebesgue y m la medida de Lebesgue.

Ejercicio 2.

(a) Sean $(X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ la completación del espacio de medida (X, Σ, μ) y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\Sigma}$-medible. Probar que existe $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, Σ-medible tal que $f = g$ $\overline{\mu}$-a.e..

(b) Si $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible , entonces existe $g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ a.e.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Supongamos que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{M}$. ¿Es f medible?

(b) Si $|f|$ es medible, ¿es f medible?

(c) Si f es monótona, probar que f es medible Borel.

(d) Si f es derivable sobre $\mathbb{R}$, probar que f' es medible Borel.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ continua en casi todo punto. Probar que f es medible.

Ejercicio 5.

(a) Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a.e., tal que no existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifica: $f = g$ a.e.

(b) Hallar $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que g es continua, $g = f$ a.e. y f es discontinua en todo punto.

Ejercicio 6. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible y sea $\epsilon > 0$. Probar:

(a) Si $A \subseteq E$ es medible, existe $g\colon E \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$|\{x \in E : g(x) \neq \chi_A(x)\}| < \epsilon.$$

(b) Si φ es una función simple definida sobre E entonces existe $g\colon E \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$|\{x \in E : g(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon.$$

(c) Si E es de medida finita y $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible y finita en c.t.p., dado $\delta > 0$ existe φ simple tal que

$$|\{x \in E : |\varphi(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

(d) Si f y E son como en (c), entonces dado $\delta > 0$ existe g continua tal que

$$|\{x \in E : |g(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

Ejercicio 7. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de medida finita y $f : E \to \mathbb{R}$ medible. Probar que dado $\epsilon > 0$ existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $|E \backslash F| < \epsilon$ y la restricción de f a F es una función continua.

Ejercicio 8. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles y finitas a.e. Decimos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \Sigma$ tal que:

$$\mu(A_\epsilon) < \epsilon \;\text{ y }\; f_n \rightrightarrows f \text{ en } X \backslash A_\epsilon.$$

Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

Ejercicio 9. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sea $(f_k)_{k\geq 1}\colon E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

Probar que si para todo $\alpha > 0$, existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$:

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}\right) \leq \alpha/k,$$

entonces $\mu(E) = 0$.

Ejercicio 10. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ finitamente medible y $(f_k)_{k\geq 1} : E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

Probar que dado $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado y $M > 0$:

$$|E \backslash F| < \epsilon \quad \text{ y } \quad |f_k(x)| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}\ , \quad \forall x \in F.$$

Ejercicio 11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = n\ \chi_{[1/n,2/n]}(x)$. Probar

(a) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente,

(b) para cada $\delta > 0, (f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en $[\delta, \infty)$,

(c) no existe $E \subset [0, \infty)$ tal que $|E| = 0$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en E^c.

Ejercicio 12.

(a) Sea (E, Σ, μ) un espacio de medida finita . Sean $(f_n)_{n\geq 1}, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, finitas en casi todo punto y tales que $f_n \to_{n\to\infty} f$ a.e. en E. Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i\geq 1}$ de conjuntos medibles de E tal que:

   a) $\mu\left(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0$,

   b) para cada $i \geq 1, f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow}_{n\to\infty} f$ en E_i.

(b) El mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde $\mu(A_k) < \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 13. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles definidas sobre un conjunto $A \in \Sigma$ y finitas en c.t.p.. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de A tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \Sigma$ y $\mu\left(A \backslash A_n\right) \to_{n\to\infty} 0$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Ejercicio 14. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Supongamos que $f_k \xrightarrow{\mu} f$ y $g_k \xrightarrow{\mu} g$. Probar:

(a) $f_k + g_k \xrightarrow{\mu} f + g$ sobre E.

(b) Si μ es finita, entonces $f_k g_k \xrightarrow{\mu} fg$ sobre E. Mostrar que la hipótesis de finitud es necesaria.

(c) Sea $(f_k/g_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en casi todo punto de E. Si $\mu(E) < +\infty$, $g_k \to g$ sobre E y $g \neq 0$ a.e., entonces $f_k/g_k \xrightarrow{\mu} f/g$.

Ejercicio 15. Sea $f_1 : [0, 1] \to [0, 1]$ la función de Cantor–Lebesgue y $f : [0, 1] \to [0, 2]$ definida por: $f(x) = f_1(x) + x$. Probar :

(a) f es continua y biyectiva. Luego f^{-1} es continua.

(b) Si C es el Ternario de Cantor, $|f(C)| = 1$.

(c) Sea $g = f^{-1}$. Mostrar que existe A medible tal que $g^{-1}(A)$ es no medible.

(d) Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.

(e) Hallar $h_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ medible Borel y $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.