

# ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN CS. BIOLÓGICAS)

Primer cuatrimestre 2013

## Práctica 1: Funciones

**Ejercicio 1.** Resolver las siguientes ecuaciones:

(a)  $4x + 3 = -3$

(f)  $\frac{3}{13}x^2 - \frac{7}{5}x = 0$

(b)  $5x + 3 = 8x + 1$

(g)  $22x^2 - 3x = 21x + 14x^2$

(c)  $\frac{x-2}{7} + \frac{x-5}{8} = 3$

(h)  $\frac{9}{x} - \frac{x}{x+4} = 1$

(d)  $|x-2| = 1$

(i)  $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$

(e)  $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$

**Ejercicio 2.** Resolver las siguientes inecuaciones:

(a)  $4x + 3 \geq -3$

(k)  $|3x - 1| > 2$

(b)  $5x + 3 > 8x + 1$

(l)  $-2|5 - \frac{x}{2}| \geq 6$

(c)  $\frac{2}{x+1} > 5$

(m)  $|x| > |x+2|$

(d)  $\frac{3x-1}{-2} > 4$

(n)  $|3x - 1| < |x - 1|$

(e)  $5x - 3 \leq -8x + 1$

(ñ)  $\left| \frac{x-2}{3x+1} \right| \leq 1$

(f)  $\frac{2x}{x+2} < 4$

(o)  $|2 - 6x| + |3x - 1| > 4$

(g)  $\frac{3x+5}{x-2} \geq 1$

(p)  $\frac{x}{|x+4|} > 3$

(h)  $1 - \frac{x-1}{x} < -5$

(q)  $\frac{2}{1 - |x-2|} < 1$

(i)  $|x-3| \leq 1$

(r)  $\frac{|2x-8|}{1 - |x-2|} < 1$

(j)  $|x+3| > 10$

**Ejercicio 3.** Representar gráficamente en la recta numérica los conjuntos de números reales  $x$  que cumplen cada una de las siguientes condiciones:

(a)  $x$  es mayor a  $-2$ .

(l)  $x^2 - 49 > 0$

(b)  $4x + 3 \geq -3$

(m)  $x^2 - 49 < 0$

(c)  $-2 \leq x \leq 4$

(n)  $(x - 2)^2 > 25$

(d)  $-3 \leq 2x + 3 < 3$

(ñ)  $\frac{3x - 1}{-2} > 4$

(e)  $-2 < -3x + 1 < 0$

(o)  $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} < 2$

(f)  $2x + 3 < -3x$

(p)  $|x - 1| < 1$

(g)  $2x + 3 \geq -3x$

(q)  $|x - 3| < |2 - x|$

(h)  $\frac{2x}{x + 2} < 0$

(r)  $0 < x^2 \leq x^3$

(i)  $\frac{2x}{x + 2} > 0$

(s)  $|x + 3| + |x - 9| > 2$

(j)  $2x(x + 5) = 0$

(t)  $||x + 2| - |x - 1|| < 1$

(k)  $x^2 - 49 = 0$

(u)  $|x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1$

**Ejercicio 4.** Se definen las siguientes funciones con valores reales:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = x^3 - 1$$

(a) Calcular el valor de  $f$  en los puntos  $0, \frac{1}{2}$  y  $2$ .

(b) Para cada  $a \in \mathbb{R}$  calcular  $f(a)$  y  $g(a + 2)$ .

(c) Hallar las funciones  $[f(x)]^2$ ,  $f(g(x))$  y  $g(f(x))$ .

**Ejercicio 5.** Hallar el dominio natural de las siguientes funciones:

(a)  $f(x) = 2x + 1$

$$(f) f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x > 4 \\ \frac{1}{(x + 3)(x + 1)(x - 5)} & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$$

(b)  $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$

(g)  $f(x) = \sqrt[4]{x}$

(c)  $f(x) = \frac{\sqrt{x + 4}}{\sqrt{x + 3}\sqrt{x - 1}}$

(h)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

(d)  $f(x) = \frac{1}{3x + 4}$

(i)  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$

(e)  $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

(j)  $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 5x + 8}$

$$(k) f(x) = \frac{x+3}{(x^2-4)(x+5)(x^2+5)} \quad (l) f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x \geq 1 \\ x+3 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

**Ejercicio 6.** Graficar las siguientes funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(a) f(x) = 2 \quad (d) f(x) = |x-1| + x$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -3 & \text{si } x < -1 \end{cases} \quad (e) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ -x-1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 7.** Hallar el dominio natural, el conjunto de ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de cada una de las siguientes funciones.

$$(a) f(x) = 0 \quad (f) f(x) = x^3 + 1 \quad (k) f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$(b) f(x) = x \quad (g) f(x) = 2x - 1 \quad (l) f(x) = \frac{x}{|x+1|}$$

$$(c) f(x) = -x \quad (h) f(x) = -2x^2 + 8x - 6 \quad (m) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$(d) f(x) = \sqrt{3-x} \quad (i) f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad (n) f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x\sqrt{x+5}}$$

$$(e) f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3} \quad (j) f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

**Ejercicio 8.** Graficar en el mismo sistema de ejes cartesianos cada uno de los siguientes conjuntos de funciones con valores reales:

$$(a) f_1(x) = x, f_2(x) = x+2, f_3(x) = x-2, f_4(x) = -x, f_5(x) = -x+2, f_6(x) = -x-2.$$

$$(b) f_1(x) = |x|, f_2(x) = |x|+3, f_3(x) = |x|-3, f_4(x) = |x+3|, f_5(x) = |x-3|, f_6(x) = -|x|.$$

$$(c) f_1(x) = x^2, f_2(x) = x^2+1, f_3(x) = x^2-1, f_4(x) = (x+1)^2, f_5(x) = (x-1)^2.$$

$$(d) f_1(x) = x^2, f_2(x) = -x^2, f_3(x) = -x^2+1, f_4(x) = -x^2-1.$$

$$(e) f_1(x) = x^2-1, f_2(x) = 2(x^2-1), f_3(x) = \frac{1}{2}(x^2-1), f_4(x) = -1(x^2-1).$$

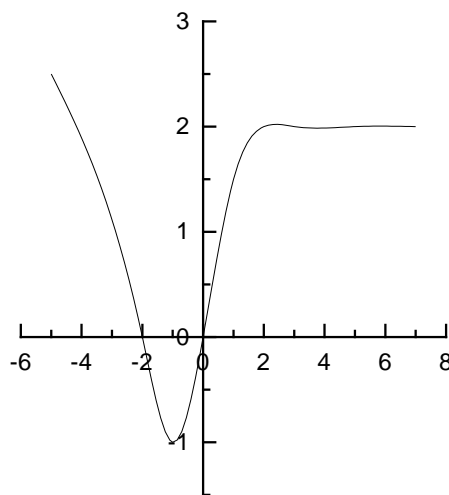
$$(f) f_1(x) = x^2-5x+4, f_2(x) = |x^2-5x+4|.$$

$$(g) f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^3 + 1, f_3(x) = (x + 1)^3, f_4(x) = -x^3, f_5(x) = (x + 1)^3 - 2, \\ f_6(x) = |x^3|.$$

$$(h) f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(x) = \frac{1}{x} + 1, f_3(x) = \frac{1}{x-1}, f_4(x) = \frac{1}{x-2} - 3, f_5(x) = -\frac{1}{x}, \\ f_6(x) = -\frac{1}{x+2} + 3.$$

¿Qué conclusiones es posible obtener a partir de la observación comparativa de los gráficos de estas funciones?

**Ejercicio 9.** Considerando la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo gráfico es:



y teniendo en cuenta lo observado en el problema anterior, obtener los gráficos de las funciones:

$$f_1(x) = f(x) + 1, f_2(x) = f(x - 2), f_3(x) = -f(x).$$

**Ejercicio 10.**

(a) A partir del gráfico de  $f(x) = \sin(x)$  obtenga los gráficos de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \sin(x) + 1 \quad f_2(x) = \sin(x) - 1 \quad f_3(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad f_4(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ f_5(x) = -\sin(x) \quad f_6(x) = |\sin(x)| \quad f_7(x) = |\sin(x)| + 1 \quad f_8(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

(b) A partir del gráfico de  $f(x) = \cos(x)$  obtenga los gráficos de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \cos(x) + 2 \quad f_2(x) = \cos(x) - 2 \quad f_3(x) = \cos(x - \pi) \quad f_4(x) = \cos(x + \pi), \\ f_5(x) = -\cos(x) \quad f_6(x) = |\cos(x)| \quad f_7(x) = |\cos(x)| - 1 \quad f_8(x) = \cos(x + \pi) - 1.$$

**Ejercicio 11.** Consideremos las siguientes funciones con valores reales:

$$f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = (x + 1)^{-1}, \quad h(x) = 3x - 2.$$

(a) Determinar el dominio natural de cada una de ellas.

(b) Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justificar.

- |                             |                      |                       |
|-----------------------------|----------------------|-----------------------|
| ▪ $-3 \in \text{Im}f$       | ▪ $0 \in \text{Im}g$ | ▪ $-1 \in \text{Im}g$ |
| ▪ $\text{Im}h = \mathbb{R}$ | ▪ $0 \in \text{Im}f$ | ▪ $5 \in \text{Im}g$  |

(c) Calcular si es posible:

- |                     |                    |                    |
|---------------------|--------------------|--------------------|
| ▪ $(g \circ f)(-1)$ | ▪ $(h \circ f)(7)$ | ▪ $(f \circ h)(7)$ |
| ▪ $(f \circ h)(1)$  | ▪ $(f \circ g)(3)$ | ▪ $(g \circ f)(6)$ |

(d) Dar las fórmulas que describan las relaciones funcionales de las siguientes composiciones:

- |               |               |                         |
|---------------|---------------|-------------------------|
| ▪ $f \circ g$ | ▪ $g \circ f$ | ▪ $g \circ h$           |
| ▪ $f \circ h$ | ▪ $f \circ f$ | ▪ $(f \circ g) \circ h$ |

¿Coinciden  $f \circ g$  y  $g \circ f$  como funciones?

**Ejercicio 12.** Determinar el dominio natural y la imagen de las siguientes funciones y estudiar su inyectividad y sobreyectividad.

(a)  $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

(d)  $f(x) = \frac{1}{x}$

(b)  $f(x) = \sqrt{x+2}$

(e)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

(c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0; \\ x + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(f)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0; \\ -x + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

**Ejercicio 13.** Demostrar la biyectividad de las siguientes funciones y determinar su inversa.

(a)  $f(x) = 4x - 5$

(b)  $f(x) = 3x - 2|x|$

**Ejercicio 14.** Calcular el dominio natural e imagen de las siguientes funciones y verificar que restringidas a dichos conjuntos resultan biyectivas. Encontrar sus inversas.

(a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

(b)  $f(x) = \frac{x}{x-2}$

(c)  $f(x) = \frac{3x^3}{x^3 - 1}$

**Ejercicio 15.** Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles son impares.

(a)  $f(x) = x^2 + 2$

(d)  $f(x) = x + x^4$

(b)  $f(x) = 2x^3 - x$

(e)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

(c)  $f(x) = \sin(2x)$

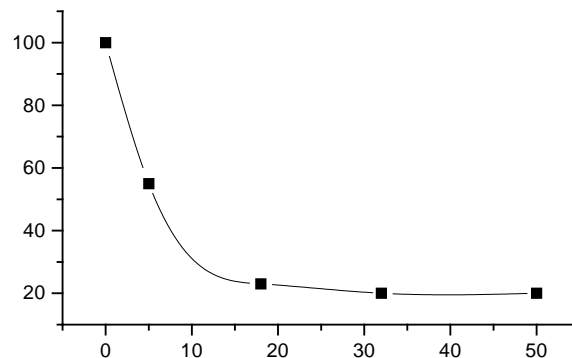
(f)  $f(x) = x^2 + 2x - 4$

**Ejercicio 16.** En un recipiente que está en el fuego hay agua en ebullición. Cuando es retirado del fuego, durante los primeros 4 minutos se enfría rápidamente. En los 12 minutos siguientes la temperatura del agua sigue bajando más lentamente hasta estabilizarse a la temperatura ambiente ( $20^\circ\text{C}$ ). Trazar un gráfico que interprete esta evolución tomando la temperatura del líquido como función del tiempo.

**Ejercicio 17.**

(a) Hacer un gráfico que refleje la evolución de la temperatura en función del tiempo de acuerdo con la siguiente descripción: “Se retira de fuego un jarro con agua hirviendo. Inicialmente la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 4 minutos era de  $48^\circ$ . Luego se fue enfriando más lentamente. A los 16 minutos del instante inicial la temperatura era de  $24^\circ$  y 16 minutos después llegó a  $16^\circ$  que era la temperatura del aire”.

(b) El siguiente gráfico, ¿corresponde a los datos descriptos? ¿Coincide con el gráfico que Ud. ha hecho? ¿Son ambos posibles? (El eje  $x$  corresponde al tiempo y el eje  $y$  a la temperatura.)



**Ejercicio 18.** Cada  $m^2$  de azulejos vale \$7 y su colocación cuesta \$15 (por  $m^2$ ). El corralón recarga \$20 de flete.

- (a) Escribir la función que expresa el costo a partir de la superficie cubierta.
- (b) Señalar el dominio de esta función.
- (c) ¿Cuál es el costo de cubrir  $12 m^2$ ?
- (d) ¿Cuántos  $m^2$  de azulejos se puede colocar gastando \$460?

**Ejercicio 19.** Cuando producen una cantidad  $x$  (en miles de toneladas) de mercadería, los productores I y II reciben respectivamente beneficios mensuales (en miles de pesos) de :

$$p_I(x) = -x^2 + 8x - 7 \qquad p_{II}(x) = \frac{7}{6}x - 2$$

- (a) Graficar ambas funciones de ganancia.
- (b) ¿Cuántas toneladas deben producir ambos productores para obtener la misma ganancia?

**Ejercicio 20.** Un proyectil es disparado desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de  $120m/s$  . La posición del proyectil a los  $t$  segundos está expresada por  $h(t) = -4,9t^2 + 120t$  .

- (a) ¿Para qué valores de  $t$  asciende el proyectil? ¿Para cuáles desciende?
- (b) Hallar el instante en el que el proyectil alcanza la altura máxima. Calcular esa altura.
- (c) Hallar el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo.
- (d) Si se efectúa otro disparo con la misma arma y en las mismas condiciones, pero desde  $50m$  de altura, determinar la función que exprese su posición en el instante  $t$  . Responder a las preguntas (a), (b) y (c) en este caso.

**Ejercicio 21.** En una laguna se introdujeron 100 truchas. Al principio el cardumen creció rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la laguna escasearon y la población decreció. Si el número de truchas  $t$  años después de la siembra está expresado por  $N(t) = -12t^2 + 21t + 100$  (donde  $t > 0$ ).

- (a) Determinar los valores positivos de  $t$  para los cuales  $N(t) > 0$  .
- (b) ¿Se extingue la población de truchas? Si es así, ¿cuándo ocurre esto?

**Ejercicio 22.** La dosis recomendada de determinado medicamento (medida en  $mg$ ) es una función lineal del peso  $x$  del paciente, expresado en  $kg$  . Sabemos que a un paciente de  $10kg$  de peso se le debe administrar  $23mg$  diarios de la sustancia, mientras que un paciente de  $50kg$  de peso debe recibir  $63mg$  del fármaco. Determinar la función que expresa la dosis correcta para un individuo que pese  $xkg$  . Graficar esta función.