Análisis Funcional - 1er cuatrimestre 2014

Operadores Acotados en Espacios de Hilbert, espectro y cálculo funcional

1. Sean H un espacio de Hilbert y $T, S \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:

   a) $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*$.
   b) $(ST)^* = T^* S^*$.
   c) $\|T^*\| = \|T\|$.
   d) $\|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$.

2. Si H es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$, entonces

   a) $\mathrm{Ker}(T) = R(T^*)^{\perp}$
   b) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp} = \overline{R(T^*)}$
   c) $\mathrm{Ker}(T^*) = R(T)^{\perp}$
   d) $(\mathrm{Ker}(T^*))^{\perp} = \overline{R(T)}$

3. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n \in \mathcal{L}(H)$ tales que $\sup\limits_n |\langle T_n x, y\rangle| < \infty \quad \forall x, y \in H$, entonces $\sup\limits_n \|T_n\| < \infty$.

4. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:

   a) T es una isometría
   b) $T^*T = I$
   c) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H$

Definiciones: *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$, H Hilbert.*

a) *T es unitario sii es inversible y $T^{-1} = T^*$*
b) *T es autoadjunto (o hermítico) sii $T^* = T$*
c) *T es normal sii $T^*T = TT^*$*
d) *T es positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$*

5. *a*) Si $\varphi \in L^\infty[0,1]$, sea $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de multiplicación. Calcular M_φ^* , probar que M_φ es normal y hallar las φ tales que M_φ resulta autoadjunto, unitario o positivo.

   b) Si $\alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$, sea $A : \ell^2 \to \ell^2$ dado por $Ax = (\alpha_n x_n)_n$. Calcular A^*, probar que A es normal y hallar las sucesiones α tales que A resulta autoadjunto, unitario o positivo.

6. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Son equivalentes:

   a) T es unitario.
   b) T^* es unitario.
   c) T es una isometría suryectiva.

d) T y T^* son isometrías.

7. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:

   a) $\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx, y\rangle|$, y si T es autoadjunto se tiene
   $$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

   b) Si T es autoadjunto, para cada $\varepsilon > 0$ existe x vector unitario tal que $\|Tx - \|T\|x\| < \varepsilon$ o $\|Tx + \|T\|x\| < \varepsilon$.

   c) Si T es autoadjunto, entonces $T = 0$ sii $(\forall x \in H)$ $\langle Tx, x\rangle = 0$.

   d) T es normal sii $(\forall x \in H)$ $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

8. Sean H y K espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Entonces $S = T^*T$ es un operador autoadjunto, positivo y con el mismo núcleo que T.

9. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Entonces:

   a) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.

   b) $\|T^n\| = \|T\|^n$. (Sug.: Empezar con el caso T autoadjunto y n potencia de 2.)

   c) $\mathrm{Ker}(T^n) = \mathrm{Ker}T$. (Misma sugerencia.)

10. Sea E espacio vectorial y $T : E \to E$ lineal. Son equivalentes:

    a) T es proyector (es decir, $T^2 = T$).

    b) $T|_{R(T)} = \mathrm{id}_{R(T)}$

    c) Existen $V, W \subseteq E$ subespacios complementarios tales que T queda bien definida por la fórmula
    $$\forall v \in V,\ w \in W \qquad T(v + w) = v.$$
    (Los espacios V y W están determinados por T y son $V = R(T)$ y $W = \mathrm{Ker}(T)$.)

    d) $I - T$ es proyector. (¿Cuáles son su imagen y su núcleo?)

    e) T^* es proyector. (¿Cuáles son su imagen y su núcleo?)

    Cuando E es Banach, T resulta continuo sii $R(T)$ y $\mathrm{Ker}(T)$ son cerrados.

11. Si H es un espacio de Hilbert, sea $P \in \mathcal{L}(H)$ proyector. Son equivalentes:

    a) P es proyector ortogonal (es decir, es proyector lineal con núcleo y rango ortogonales entre sí).

    b) $\|P\| \leq 1$

    c) $I - P$ es proyector ortogonal.

    d) P^* es proyector ortogonal.

    e) P es autoadjunto.

    f) P es normal.

12. Sean H un espacio de Hilbert, $S, T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:

   a) T^*T y TT^* son positivos.

   b) Si T es positivo, S^*TS es positivo.

13. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que $R(T)$ es cerrado si y sólo si T es acotado inferiormente en $(\mathrm{Ker}(T))^\perp$.

14. Sean H un espacio de Hilbert, $T_n, T \in \mathcal{L}(H)$ normales.

   a) Si $T_n x \to Tx \ \ \forall x \in H$ entonces $T_n^* x \to T^* x \ \ \forall x \in H$.

   b) Dar un contraejemplo si los operadores T_n no son normales.

   Definición: *Si H es un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ se dice isometría parcial si $T|_{(KerT)^\perp}$ es isometría.*

15. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$. T es isometría parcial si y sólo si T^*T es proyector.

16. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ positivo. Entonces $\{x \in H : \langle Tx, x\rangle = 0\}$ es un subespacio de H.

17. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto.

   a) Los autovalores de T son reales y si $V \subseteq H$ es un subespacio T-invariante, entonces $V^\perp$ es T-invariante.

   b) Si $\dim H < \infty$ entonces T es diagonalizable, con autovalores reales y autoespacios ortogonales.

   c) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mathrm{Ker}T^n = \mathrm{Ker}T$.

   Definición: *Sea $T \in \mathcal{L}(H, K)$ un operador entre espacios de Hilbert y sea $(e_n)_n$ una base ortonormal de H. Diremos que T es de Hilbert-Schmidt si $\sum_n \|Te_n\|^2$ converge, y notaremos*

$$\|T\|_2 = \left(\sum_n \|Te_n\|^2\right)^{1/2}.$$

18. Sea $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Probar que:

   a) $\|T\|_2$ no depende de la base elegida y $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$. (Sugerencia: Si $(f_m)_m$ es base de K, escribir $\|Te_n\|^2 = \sum_n |\langle Te_n, f_m\rangle|^2$.)

   b) $\langle S, T\rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle Se_n, Te_n\rangle$, es un producto interno que define $\|\cdot\|_2$ y hace del conjunto de operadores de Hilbert-Schmidt un espacio de Hilbert.

   c) Sea $T_A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ el operador que multiplica por una matriz A. Probar que es de Hilbert-Schmidt y calcular $\|T_A\|_2$.

19. Probar que:

   a) Todo operador T de Hilbert-Schmidt es compacto con $\|T\| \le \|T\|_2$.

b) Sean H Hilbert y $T, S \in \mathcal{L}(H)$ tales que T es de Hilbert-Schmidt. Entonces ST y TS son de Hilbert-Schmidt con $\|ST\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$ y $\|TS\|_2 \leq \|T\|_2\|S\|$.

20. a) Si $K \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ es un operador integral, probar que entonces K es de Hilbert-Schmidt y calcular $\|K\|_2$.

    b) ¿Bajo qué condición sobre la sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ el operador $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ dado por $Tx = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Hilbert-Schmidt?

    c) Dar un ejemplo de operador compacto que no sea de Hilbert-Schmidt.

21. Sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $1 < p < \infty$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

    a) Si $\alpha_n \to 0$, hallar $\sigma(T)$.

    b) Hallar $\sigma(T)$ en el caso general ($\alpha_n \in \ell^\infty$).

22. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$.

    a) Si A es autodjunto, entonces $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

    b) Si A es unitario, entonces $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

23. Sean $U \in \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $\varphi \in C(\overline{U})$ y $M_\varphi \in \mathcal{L}(C(\overline{U}))$ el operador de multiplicación.

    a) Dar condiciones necesarias y suficientes para que M_φ sea inversible.

    b) Calcular $\sigma(M_\varphi)$.

    c) Dar condiciones necesarias y suficientes para que M_φ sea compacto.

24. Si $1 < p < \infty$, sean S y T en $\mathcal{L}(\ell^p)$ los shifts a derecha e izquierda respectivamente.

    a) Probar que $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |\lambda| \leq 1\}$ y que si $|\lambda| < 1$ entonces λ es un autovalor.

    b) Calcular $\sigma(S)$

    c) Probar que S no tiene autovalores.

25. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$.

    a) Si $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^n \in \sigma(T^n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

    b) Si T es inversible y $\lambda \in \sigma(T)$ entonces $\lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$

26. Si $1 < p < \infty$, sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots)$$

    a) Probar que T no es compacto.

    b) Probar que T^2 sí es compacto.

    c) Calcular $\sigma(T)$.

27. Sea $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de Volterra dado por

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(y)\, dy.$$

Calcular $\sigma(V)$.

28. Sea $\varphi \in L^\infty[0,1]$ y sea $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ el operador de multiplicación. Hallar $\sigma(M_\varphi)$ en los siguientes casos:

   a) φ continua en [0,1].

   b) $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

29. Si $A \in \mathcal{L}(X)$, definimos

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

   a) Probar que $e^A \in \mathcal{L}(X)$ y que $x(t) = e^A x_0$ proporciona la única solución de la ecuación diferencial

$$x'(t) = Ax(t)$$

   con la condición inicial $x(0) = x_0$.

   b) Probar que si A y B conmutan, entonces vale la fórmula

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

   c) Si X es un espacio de Hilbert complejo, y si A es autoadjunto probar que e^A es autoadjunto y positivo, y que e^{iA} resulta unitario.

30. Sea H un Hilbert y $T, S \in \mathcal{L}(H)$ operadores autoadjuntos compactos. Probar que T y S son unitariamente equivalentes si y sólo si

$$\dim\ \mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \dim\ \mathrm{Ker}(S - \lambda I),$$

   para todo λ.

31. Sea T un operador compacto autoadjunto en $\mathcal{L}(H)$. Probar que:

   a) Si

$$T^3 + bT^2 + cT = 0,$$

   con $b, c \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 - 4c < 0$, entonces $T = 0$.

   b) Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T^i = 0$, con $\alpha_i \in \mathbb{C}$ entonces T es de rango finito.

32. Probar que si $S \in \mathcal{L}(H)$ conmuta con un operador compacto autoadjunto no nulo, entonces existe un subespacio de dimensión finita no nulo invariante por S.

33. Sea T un operador compacto y autoadjunto en $\mathcal{L}(H)$ y $f \in C(\sigma(T))$ tal que $f(0) = 0$ probar que $f(T)$ es compacto.

34. Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto. Probar:

   a) $T \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(T) \subset [0, \infty) \Leftrightarrow$ existe $A \in \mathcal{L}(H)$ tal que $T = AA^*$.

   b) Existen $T^+, T^- \geq 0$ tales que $T = T^+ - T^-$ y $T^+T^- = T^-T^+ = 0$. Concluir que todo operador en $\mathcal{L}(H)$ es combinación lineal de, a lo sumo, 4 operadores positivos.

c) Si $T \geq 0$ y $n \geq 1$ entonces existe un operador $A \geq 0$ tal que $A^n = T$ y $\|T\| = \|A\|^n$.

35. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto con $\|A\| \leq 1$. Probar que existe un operador unitario U tal que $A = 1/2(U + U^*)$. (Sugerencia: considerar la función $f(t) = t + i\sqrt{1-t^2}$.)

    Concluir que todo operador de $\mathcal{L}(H)$ es combinación lineal de, a lo sumo, 4 operadores unitarios.

36. Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo, entonces $\|A^{1/2}\| = \|A\|^{1/2}$

37. Sean H un espacio de Hilbert, A y B operadores positivos en $\mathcal{L}(H)$ tales que $AB = BA$, entonces AB es positivo.

38. Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador positivo, entonces

$$\|Ax\|^2 \leq \|A\|\langle Ax, x\rangle$$

39. Sea H un espacio de Hilbert separable con base $\{e_n\}_n$, sea $K \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto positivo con descomposición espectral $Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle$, entonces el operador $K^{1/2}$ es compacto y su descomposición espectral es $K^{1/2}x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/2} \langle x, e_n\rangle$.

40. Sean H un espacio de Hilbert, A y B operadores en H tales que $0 \leq A \leq B$. Si B es compacto, entonces A es compacto.

41. Si H es un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ tal que $I \leq A$, entonces $A^{1/2}$ es acotado inferiormente.

42. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$. Probar que

    a) $A = \mathfrak{R}(A) + i\mathfrak{I}(A)$, donde $\mathfrak{R}(A) = \frac{A+A^*}{2}$, $\mathfrak{I}(A) = \frac{A-A^*}{2i}$ son operadores autoadjuntos.

    b) A es combinación lineal de a lo sumo 4 operadores unitarios.
    (Sugerencia: Si $A^* = A$, $\|A\| \leq 1$, usar $f(t) = t + i\sqrt{1-t^2} \in C(\sigma(A))$ y que $t = \frac{f(t)+\overline{f(t)}}{2}$).

43. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$ positivo. Probar que $0 \notin \sigma(A)$ si y solo si existe $B \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto tal que $A = e^B$.

44. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$ tal que $0 \leq A \leq I$. Entonces $\{A^{1/n}\}_n$ es una sucesión creciente en $\mathcal{L}(H)$ tal que $0 \leq A^{1/n} \leq I$.