Análisis Funcional - 1er cuatrimestre de 2014

Operadores compactos – Operadores de Fredholm

1. Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Son equivalentes
   a) T es compacto.
   b) $\overline{T(A)}$ es compacto, para todo conjunto acotado $A \subset E$.
   c) Para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.

2. Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T es compacto entonces $\forall\, x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ se verifica que $T(x_n) \to T(x)$.

3. Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T es compacto, $R(T)$ es separable.

4. a) Sea E un espacio de Banach. Si $\dim E = \infty$, $Id : E \to E$ no es compacto.
   b) Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\dim E = \infty$ y T es compacto, entonces T no es inversible.

5. Sea $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por $T(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $1 < p < \infty$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.
   a) T es compacto si y sólo si $\alpha_n \to 0$
   b) $R(T)$ es cerrado si y sólo si $(\frac{1}{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada (considerando sólo los n tales que $\alpha_n \neq 0$).

6. Sea E un espacio de Banach reflexivo con dual separable. Probar que todo operador $T : E \to \ell_1$ es compacto.

7. Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{K}(E, F) = \{T : E \to F : \text{T es compacto}\}$.
   a) Si existe $S \subset R(T)$ subespacio cerrado entonces $\dim S < \infty$.
   b) Si $R(T)$ es cerrado entonces $\dim R(T) < \infty$.
   c) Si $\dim E = \infty$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ tal que $\|x_n\| = 1 \ \ \forall n$ y $Tx_n \to 0$. (Sug: T acotado inferiormente $\Rightarrow R(T)$ cerrado)

8. a) Si $T \in \mathcal{L}(\ell^2, \ell^1)$ entonces T es compacto.
   b) Sea $i : \ell^1 \to \ell^2$ la inclusión. ¿Es i compacta?
   c) Probar que la inclusión, $i : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ es compacta.

9. Sean $k \in C([a, b] \times [a, b])$ y $K : C[a, b] \to C[a, b]$ el operador integral con núcleo k, dado por
$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy$$
   Probar que K es un operador lineal acotado y compacto. (Sug: Arzela-Ascoli)
   ¿Qué sucede si se reemplaza $[a, b]$ por $\overline{U}$ con U abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$?

10. Sean $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ y $K \in \mathcal{L}(L^2([0, 1]))$ el operador integral con núcleo k. Probar que:

a) Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $L^2([0,1])$, entonces $(e_{nm}(x,y) = e_n(x)\overline{e_m(y)})_{n,m\in\mathbb{N}}$ es una base de $L^2([0,1]\times[0,1])$.

b) Si $k(x,y) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} f_i(x) g_j(y)$, con $\alpha_{ij}\in\mathbb{C}$, $f_i, g_j \in L^2([0,1])$ entonces $\dim R(K) \leq N$.

c) Si $k_n \to k$ en $L^2([0,1]\times[0,1])$, entonces $K_n \to K$ en $\mathcal{L}(L^2([0,1]))$.

d) Si $k(x,y) = \displaystyle\sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{nm} e_n(x)\overline{e_m(y)}$ y $k_N(x,y) = \displaystyle\sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{nm} e_n(x)\overline{e_m(y)}$, entonces $k_N \to k$ en $L^2([0,1]\times[0,1])$.

e) Deducir de todo lo anterior que K es compacto.

11. Sean E y F espacios de Banach. Si $\forall\varepsilon > 0$ y $\forall K \subset E$ compacto $\exists T \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\dim R(T) < \infty$ y $\displaystyle\sup_{x\in K} \|Tx - x\| < \varepsilon$, entonces para todo operador $A \in \mathcal{K}(F,E)$ existen operadores $A_n \in \mathcal{L}(F,E)$ tales que $\dim R(A_n) < \infty \quad \forall n\in\mathbb{N}$ y $A_n \to A$.

Definición:

a) *Sean E un espacio de Banach y $S \subseteq E$ un subespacio cerrado. Llamamos codimensión de S en E a la dimensión del espacio E/S y notamos por* $\operatorname{codim}(S)$ *a dicha dimensión.*

b) *Sean E y F dos espacios de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Se dice que T es un operador de Fredholm si*

1) $\dim(\ker(T))$ *es finita.*

2) $R(T)$ *es cerrado y* $\operatorname{codim}(R(T))$ *es finita.*

c) *Sean E y F dos espacios de Banach, y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$ un operador de Fredholm. Llamamos índice de T y notamos por* $\operatorname{ind}(T)$ *al número* $\dim(\ker(T)) - \operatorname{codim}(R(T))$.

12. Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador de Fredholm, probar que $\operatorname{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \dim(\ker(T^*))$.

13. Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador de Fredholm, probar que si $\dim(\ker(T^*)) = 0$ entonces $Tx = y$ tiene por lo menos una solución $\forall y \in F$.

14. *a*) Considerar $S : \ell^2 \to \ell^2$ el operador Shift y T su inverso a izquierda, mostrar que son operadores de Fredholm y calcular sus índices.

b) Para S y T como en (a) mostrar que S^k y T^k también son operadores de Fredholm y calcular sus índices.

c) Sea $T : E \to F$ un operador de rango finito, con E y F espacios de Banach. ¿Es T un operador de Fredholm?

d) Sea $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definido por $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$. ¿Es A un operador de Fredholm?

15. Probar que $f(x) - \displaystyle\int_0^\pi \sin(x+y) f(y)\, dy = g(x)$ tiene única solución $\forall g \in L^2[0,\pi]$