

Análisis Funcional - Primer cuatrimestre de 2014

Práctica 5 - Espacios de Hilbert

1. Probar que son espacios de Hilbert:

a) \mathbb{C}^n , con producto escalar $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$

b) ℓ^2 , con producto escalar $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

c) $L^2(X)$, donde (X, Σ, μ) es un espacio de medida, con producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$$

2. Si H es un espacio vectorial y $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ es sesquilineal y hermitiana, vale la fórmula de polarización, $\forall x, y \in H$:

$$a(x, y) = \frac{1}{4} \left\{ a(x+y, x+y) - a(x-y, x-y) + i \left[a(x+iy, x+iy) - a(x-iy, x-iy) \right] \right\}$$

En particular, en H Hilbert, $\forall x, y \in H$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left\{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i \left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 \right) \right\}$$

3. a) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Probar que existe un producto escalar que induce la norma de E (y que hace de E un espacio de Hilbert) si y sólo si $\|\cdot\|$ verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E$$

b) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, si $p \neq 2$ y $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$ no son espacios de Hilbert.

4. Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{e_n\}_n$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

a) $\{e_n\}_n$ es ortonormal maximal.

b) Si $x \in H$, $x \perp e_n \quad \forall n$, entonces $x = 0$.

5. Ortogonalización de Gram-Schmidt: Sea H un espacio de Hilbert y supongamos que $\{b_n\}_n$ es un subconjunto linealmente independiente de H que genera un subespacio denso en H .

a) Definamos $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ y, una vez definido e_n ,

$$e_{n+1} = \frac{b_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle b_{n+1}, e_k \rangle e_k}{\|b_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle b_{n+1}, e_k \rangle e_k\|}$$

Probar que $\{e_n\}_n$ es una base de H .

b) Si $\{f_n\}_n$ es un conjunto ortonormal tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, con $\lambda_n \neq 0$, tales que $f_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ entonces $f_n = \alpha_n e_n$, con $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1 \quad \forall n$.

6. Desigualdad de Bessel: Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ un conjunto ortonormal. Probar que

a) $\forall x \in H$ y para cada $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

b) $\forall x \in H$, $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n \rangle|^2$ converge y $\sum_{n=1}^\infty |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

7. Sea H un espacio de Hilbert, si $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ es una base de H entonces $\forall x \in H$ vale:

a) $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle e_n$

b) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle x, e_n \rangle|^2$

c) Si $y \in H$, $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$

8. a) Probar que $\{e^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2$ dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$ es una base de ℓ^2 .

b) Probar que $\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de $L^2[-\pi, \pi]$.

c) Probar que $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x)\}_{n=1}^\infty$ es una base de $L^2[-1, 1]$ considerado como \mathbb{R} espacio vectorial.

9. a) El conjunto $\{1, x, x^2, \dots\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2[-1, 1]$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que

$$e_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

donde $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$ son los polinomios de Legendre.

b) El conjunto $\{x^n e^{-x^2/2} : n \geq 0\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2(-\infty, \infty)$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} H_n(x) e^{-x^2/2}$$

donde $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$ son los polinomios de Hermite y $H'_n = 2n H_{n-1}$. Las funciones $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son conocidas como las funciones de Hermite.

10. Sean H y K espacios de Hilbert. En $H \times K$ definimos

$$\langle (h_1, k_1), (h_2, k_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle_H + \langle k_1, k_2 \rangle_K$$

Probar que $(H \times K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert, y que $H \times \{0\}$ y $\{0\} \times K$ son cerrados y ortogonales en $H \times K$.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $S \subset H$ un subespacio cerrado propio.

- Probar que existe $x \in H - S$ tal que $x \perp S$.
- Si $S^\perp = \{x \in H : x \perp S\}$ entonces S^\perp es un subespacio cerrado y $S \oplus S^\perp = H$.
- $(S^\perp)^\perp = S$
- Dar contraejemplos de (b) y (c) si S no es cerrado.

12. a) Sean H un espacio de Hilbert, $D \subset H$ un subconjunto. El subespacio generado por D es denso en H si y sólo si se verifica

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in D \Rightarrow x = 0$$

- En ℓ^2 sea $S = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$. Probar que S es denso en ℓ^2 .

13. Sean S y T subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert H . Probar que $S \oplus T$ es cerrado.

14. Sea $A = \{(x_n) \in \ell^2 : 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}\}$. Calcular $Pr_A(x)$.
¿Cuánto vale $\lim_{k \rightarrow \infty} d(e_k, A)$?

15. Sea H un espacio de Hilbert separable y (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida.

- Decimos que una función $f : X \rightarrow H$ es medible si $x \mapsto \langle f(x), v \rangle$ es una función medible (a valores en \mathbb{C}) para todo $v \in H$. Probar que si f es medible, entonces $\|f\|$ es medible.
- Si $f : X \rightarrow H$ es medible y $\int_X \|f(x)\| d\mu < \infty$, definimos la integral $I = \int_X f(x) d\mu$, como el único vector $I \in H$ que verifica

$$\langle I, v \rangle = \int_X \langle f(x), v \rangle d\mu \quad \forall v \in H$$

Probar que la integral está bien definida, es lineal como función de f , y que se verifica

$$\left\| \int_X f(x) d\mu \right\| \leq \int_X \|f(x)\| d\mu$$

16. Sean H un espacio de Hilbert. Diremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debilmente a x y lo notamos $x_n \xrightarrow{w} x$ si

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

- Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $e_n \xrightarrow{w} 0$.

- b) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ entonces $x_n \rightarrow x$.
- c) Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $(x_n)_n$ está acotada y $\langle x_n, e_m \rangle \rightarrow \langle x, e_m \rangle \quad \forall m \in \mathbb{N}$.
- d) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces existe una subsucesión x_{n_k} tal que su media aritmética $z_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + \dots + x_{n_k})$ verifica que $z_k \rightarrow x$.

17. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H , son equivalentes:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge débilmente.
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

18. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortogonal completo en un espacio de Hilbert H y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión ortogonal en H que verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1,$$

entonces $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también completo.

19. Sean $f, g \in L^2[a, b]$, decimos que $f' = g$ en sentido débil si

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = - \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in C_0^1[a, b]$$

Definimos el espacio de Sóbolev $H^1[a, b]$

$$H^1[a, b] = \{f \in L^2[a, b] : \exists g \in L^2[a, b] \text{ tal que } f' = g \text{ en sentido débil} \}$$

a) Probar que $H^1[a, b]$ es un espacio de Hilbert si definimos el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{H^1[a, b]} = \langle f, g \rangle_{L^2[a, b]} + \langle f', g' \rangle_{L^2[a, b]}$$

- b) Probar que si $f' = 0$ en sentido débil, entonces f es constante en casi todo punto.
- c) Probar que si $f \in H^1[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f'(x)$ entonces $f - F'(x)$ es constante en casi todo punto.
- d) Concluir $H^1[a, b]$ puede identificarse con el conjunto de las funciones f que son absolutamente continuas en $[a, b]$ tales que $f'(x)$ (que existe en casi todo punto) está en $L^2[a, b]$.
- e) Sea $H_{per}^1[-\pi, \pi]$ el subespacio de las funciones de $H^1[-\pi, \pi]$ tales que

$$f(0) = f(2\pi).$$

Probar que $f \in H_{per}^1[-\pi, \pi]$ si y sólo si sus coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ (los coeficientes del desarrollo en el sistema ortogonal del ejercicio 8 b)) verifican que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |\hat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Sugerencia: Para una de las implicaciones probar que la serie de Fourier de f converge absoluta y uniformemente en $[-\pi, \pi]$.