

## Análisis Funcional - Primer Cuatrimestre 2014

### PRÁCTICA 1

#### ESPACIOS DE BANACH

1.
  - a) Si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $s_f = \{(x_n)_n \in \ell^p : x_n = 0 \text{ salvo para finitos } n\}$ , entonces  $s_f$  es un subespacio de  $\ell^p$  no cerrado (más aún: si  $p < \infty$ , es denso).
  - b) Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $S \subset E$  un subespacio, entonces  $\bar{S}$  es un subespacio.
  - c) Mostar que  $\ell^p \subset \ell^\infty$ . Calcular  $\bar{\ell^p}$  en  $\ell^\infty$ .
  - d) Sean  $E$  un espacio de Banach,  $S$  un subespacio cerrado de  $E$ , entonces  $S$ , con la norma inducida por  $E$ , es un espacio de Banach.
2. Sea  $V$  un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) y  $B \subset V$  un subconjunto que satisface las siguientes propiedades:
  - a)  $0 \in B$
  - b)  $B$  es convexo.
  - c) Si  $x \in B$  y  $|\lambda| = 1$ , entonces  $\lambda \cdot x \in B$ .
  - d) Para todo  $x \in V$ , existe  $\lambda > 0$  tal que  $\frac{x}{\lambda} \in B$
  - e) Si  $x_n = \lambda_n x \in B \forall n \in \mathbb{N}$  ( $0 \leq \lambda_n \leq 1$ ) y  $\lambda_n \rightarrow 1$ , entonces  $x \in B$ .
  - f) No existe ninguna recta que pasa por el origen contenida en  $B$ , es decir, dado  $x \neq 0$ , existe  $\lambda > 0$  tal que  $\lambda x \notin B$ .

entonces, si definimos

$$\|x\| = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in B \right\}$$

$V$  resulta un espacio normado, y  $B = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$ .

3. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado. Son equivalentes:
  - a)  $E$  es Banach
  - b)  $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  es completo
  - c)  $\{x \in E : \|x\| = 1\}$  es completo

DEFINICIÓN: Sean  $E$  un espacio vectorial,  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|'$  dos normas definidas sobre  $E$ . Decimos que las normas son equivalentes si y sólo si  $\exists a, b > 0 / \|x\| \leq a\|x\|' \leq b\|x\| \forall x \in E$ .

4.
  - a) Dos normas definidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si cada sucesión que converge con una, converge con la otra.
  - b) Si  $E$  es un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas definidas sobre  $E$  son equivalentes.
  - c) Si  $E$  es un espacio vectorial de dimensión finita, cualquier norma que se defina sobre  $E$  hace de  $E$  un espacio de Banach.
  - d) Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $S \subset E$  un subespacio de dimensión finita, entonces  $S$  es cerrado.

5. Si  $E$  es un espacio vectorial normado de dimensión finita, demostrar que  $B(0, 1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  es compacta.
6. Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $F \subset E$  un subespacio de dimensión finita, entonces  $\forall x \notin F \exists y_0 \in F$  que realiza la distancia, o sea

$$\|x - y_0\| = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

*Sugerencia.* Ver que  $y_0 \in S = \{y \in F : \|y\| \leq 2\|x\|\}$ .

7. *Lema de Riesz:* Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $F \subset E$  un subespacio cerrado propio ( $F \neq E$ ),  $0 < a < 1$ , entonces  $\exists x_a \in E$ ,  $\|x_a\| = 1$  tal que  $d(x_a, F) \geq a$ .

(Sug: Sea  $x \in E - F$ ,  $d = d(x, F) > 0$ , tomar  $y_0 \in F$  tal que  $0 < d(x, y_0) < \frac{d}{a}$  y probar que  $x_a = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$  es el que sirve).

8. Sea  $E$  un espacio vectorial normado,  $B(0, 1)$  es compacta si y sólo si  $\dim E < \infty$ .
9. a) Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $S \subset E$  un subespacio.  $S$  tiene interior no vacío si y sólo si  $S = E$ .
- b) Sea  $E$  un espacio vectorial. Probar que posee una base algebraica.
- c) Probar que un espacio de Banach  $E$  de dimensión infinita no puede tener una base (algebraica) numerable (en otras palabras,  $\dim E > \aleph_0$ ).
- d) Probar que todo espacio vectorial se lo puedo normar.
- e) Probar que todo espacio vectorial de dimensión infinita posee dos normas no equivalentes.

10. Demostrar que un espacio de Banach tiene dimensión finita si y sólo si todo subespacio es cerrado.

11. Sea  $E$  un espacio vectorial normado,  $E$  es de Banach si y sólo si  $\forall (x_n)_n \subset E$  vale que:  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge en  $E$ .

12. Sean  $E$  y  $F$  espacios vectoriales normados. En  $E \times F$ , definimos  $\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$ .

- a)  $(E \times F, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial normado.
- b) Si  $E$  y  $F$  son espacios de Banach,  $E \times F$  resulta un espacio de Banach.
- c) La inyección  $J_E : E \rightarrow E \times F$  dada por  $J_E(x) = (x, 0)$  y la proyección  $P_E : E \times F \rightarrow E$  dada por  $P_E(x, y) = x$  son ambas continuas. Lo mismo vale para  $J_F$  y  $P_F$ .

13. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $S \subset E$  un subespacio cerrado.

- a) Probar que  $E/S$  es un espacio vectorial.
- b) Si definimos en  $E/S$  la norma  $\|[x]\| = \|x + S\| = d(x, S)$ , probar que está bien definida y que es, efectivamente, una norma.
- c) Si  $\Pi : E \rightarrow E/S$  es la proyección al cociente  $\Pi(x) = [x]$ , ver que  $\Pi$  es lineal, que  $\|\Pi\| \leq 1$  y que  $\Pi$  es abierta.

d) Probar que  $E/S$  es un espacio de Banach.

14. Probar que la norma de  $[x]$  (la clase de una sucesión  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\ell^\infty/c_0$ ) coincide con  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ .
15. Sean  $E$  un espacio de Banach,  $S, T \subset E$  subespacios cerrados con  $\dim T < \infty$  entonces  $S + T$  es cerrado.
16. a) Sea  $K$  un espacio métrico (topológico) compacto, entonces  $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas}\}$  con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

es un espacio de Banach.

b) Si  $K$  es un compacto de  $\mathbb{C}^n$ ,  $C(K)$  es separable.

17. Probar que los siguientes espacios son Banach con las normas indicadas. Por  $\Omega$  entendemos un abierto acotado en  $\mathbb{R}^N$ .

a)  $C^1(\overline{\Omega})$   $\|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty$ .

b)  $C^r(\overline{\Omega})$   $\|f\| = \|f\|_\infty + \sum \|f_{x_i}\|_\infty + \dots + \sum \|f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}}\|_\infty$  ( $r \in \mathbb{N}$ ).

c)  $Lip(\overline{\Omega})$   $\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x, y \in \overline{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ .

d)  $C^\alpha(\overline{\Omega})$   $\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{x, y \in \overline{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . ¿Qué sucede si  $\alpha > 1$ ?

e) El Espacio de las Funciones de Variación Acotada.

$$BV([0, 1]) = \{f \in C([0, 1]) / \sup_{0=a_0 < a_1 < \dots < a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < +\infty\}$$

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{0=a_0 < a_1 < \dots < a_n=1} \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$$

18. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados,  $T : E \rightarrow F$  lineal. Son equivalentes:

(i)  $T$  es continuo.

(ii)  $T$  es continuo en 0.

(iii)  $T$  es acotado (i.e.  $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} < \infty$ )

19. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados,  $T : E \rightarrow F$  lineal. Entonces

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\} \end{aligned}$$

y  $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$

20. Sean  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  (o  $\mathbb{R}$ , según sea el cuerpo de escalares de  $E$ ) una forma lineal. Probar  $\varphi$  es continua si y sólo si  $\ker \varphi$  es cerrado.

21. Probar que las siguientes funcionales son lineales, continuas y hallar sus normas.

a)  $\varphi : c \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

b)  $\varphi : L^2[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(f) = \int_{-1}^1 t f(t) dt$ .  $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(f) = \int_{-1}^1 t f(t) dt$

c)  $\varphi : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = x_1 + x_2$ .  $\varphi : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = x_1 + x_2$

d)  $\varphi : \ell^1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$ .  $\varphi : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$

e)  $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$

22. Sean  $E$  un espacio vectorial normado,  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$  lineal tales que para toda sucesión  $(x_n)_n \subset E$  convergente a 0, resulta  $(\varphi(x_n))_n$  acotada. Demostrar que  $\varphi$  es continua.

23. Sea  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  una matriz simétrica. Considerar a  $A$  como un operador lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , utilizando en  $\mathbb{R}^n$  la norma euclídea. Probar que  $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es un autovalor de } A\}$ .

24. **Operadores Shift:** Sean  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $S : \ell^p \rightarrow \ell^p$ ,  $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$  dados por

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

a) Probar que  $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$  y es inyectivo. Calcular  $\|S\|$ .

b) Probar que  $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$  y es suryectivo. Calcular  $\|T\|$ .

c)  $TS = I$ ,  $ST \neq I$ .

25. **Operadores de Multiplicación:**

a) Si  $\varphi \in C[0, 1]$ , sea  $M_\varphi : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  definida por

$$M_\varphi(f) = \varphi f$$

Probar que  $M_\varphi \in \mathcal{L}(C[0, 1])$  y calcular su norma.

b) Si  $\varphi \in L^\infty[0, 1]$ , probar que  $M_\varphi$ , es un operador acotado de  $L^p[0, 1]$  en  $L^p[0, 1]$  y calcular su norma.

26. **Operadores integrales:** Si  $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ , sea  $K : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$  dado por

$$(Kf)(s) = \int_0^1 k(s, t) f(t) dt$$

Probar que  $K \in \mathcal{L}(L^2[0, 1])$  y que  $\|K\| \leq \|k\|_2$

27. Sea  $\alpha = (\alpha_n)_n$  una sucesión de números complejos,  $1 \leq p < \infty$ , definimos  $M_\alpha : \ell^p \rightarrow \ell^p$  por  $M_\alpha((x_n)_n) = (\alpha_n x_n)_n$ . Probar:

a)  $M_\alpha$  está bien definida  $\Leftrightarrow \alpha = (\alpha_n)_n \in \ell^\infty$

b)  $M_\alpha$  es inyectiva  $\Leftrightarrow \alpha_n \neq 0 \forall n$

c)  $M_\alpha$  es un isomorfismo  $\Leftrightarrow (\frac{1}{\alpha_n})_n \in \ell^\infty$

d)  $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$