

## Práctica 6: Teoremas de la Función Implícita e Inversa

---

### Planos y rectas tangentes a superficies dadas de manera implícita en $\mathbb{R}^3$

1. Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  la esfera de radio 1 centrada en el origen; es decir,  $S$  es la superficie de  $\mathbb{R}^3$  definida por  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Mostrar que el vector  $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  es normal a la superficie  $S$  en el punto  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  e interpretar este hecho geoméricamente.

2. Consideremos la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ . Probar que las rectas

$$\mathbb{L}_1 : t(0, 1, 1) + (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(0, 1, -1) + (1, 0, 0)$$

son ortogonales y están contenidas en  $S$ . Usar esto para hallar la ecuación del plano tangente a  $S$  en  $(1, 0, 0)$ .

3. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

(a)  $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \quad x_0 = (7, 0, 0)$

(b)  $xy - z \ln(y) + e^{xy} = 1 \quad x_0 = (0, 1, 1)$

(c)  $xy \operatorname{sen}(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \quad x_0 = (4, 0, 1)$

(d)  $\cos(x) \cos(y)e^z = 0 \quad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$

4. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $(x_0, y_0)$  y sea  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $h(x, y, z) = f(x, y) - z$ . ¿Qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  y el plano tangente a una superficie de nivel de  $h$  en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ?

5. Encontrar los puntos  $P = (x_0, y_0, z_0)$  de la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$$

en los que el plano tangente a  $S$  sea paralelo al plano  $\Pi : x + 4y + 6z = 8$ .

6. Sea  $E$  el elipsoide definido por la ecuación  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$ .

(a) Demostrar que si  $P = (a, b, c) \in E$ , entonces  $-P = (-a, -b, -c) \in E$

(b) Demostrar que el plano tangente a  $E$  en  $P$  es paralelo al plano tangente a  $E$  en  $-P$ .

(c) Probar que si  $P$  y  $Q$  son dos puntos distintos de  $E$ , y el plano tangente a  $P$  es paralelo al plano tangente a  $Q$ , entonces  $Q = -P$

## Teoremas de la Función Implícita e Inversa

7. Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal  $T(x, y) = (3x - 2y, 5x - 2y)$ . Mostrar que  $T$  es biyectiva y hallar la expresión de la inversa  $T^{-1}$ . Calcular  $DT^{-1}(a)$  para cada  $a \in \mathbb{R}^2$ .

8. Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F(x, y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y)$$

(a) Demostrar que existe un entorno  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que  $(1, 1) \in U$ , un entorno  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que  $(-7, 2) \in V$  y una inversa para  $F$ ,  $F^{-1} : V \rightarrow U$ ,  $C^1$  tal que  $F^{-1}(-7, 2) = (1, 1)$ .

(b) Sean  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  tal que  $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 5$  y  $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ . Calcular  $\frac{\partial(g \circ F^{-1})}{\partial v}(-7, 2)$ .

9. Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ . Probar que para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  se tiene  $\det(DF(x, y)) \neq 0$  pero  $F$  no es inyectiva.

10. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$$

(a) Demostrar que  $f(x, y, z) = 0$  define una función implícita  $x = \varphi(y, z)$  en el punto  $(1, 1, 1)$ .

(b) Encontrar  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$ .

11. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como

$$f(x, y) = (yx^{3/2} + (y + 1)^2 - 6, (\ln(x) + 5)y - 4)$$

(a) Probar que existe una inversa de  $f$  definida en un entorno del punto  $p = (5, 6) = f(1, 2)$ , diferenciable en  $p$ .

(b) Sean  $v = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ ,  $w = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$  vectores en  $\mathbb{R}^2$  y  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en  $q = (1, 2)$  tal que  $\frac{\partial g}{\partial v}(1, 2) = 4$  y  $\frac{\partial g}{\partial w}(1, 2) = 5$ . Calcular  $D(g \circ f^{-1})(5, 6)$ .

12. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x, y, z) = x^2y + \ln(y)z - 1$$

(a) Probar que la ecuación  $f(x, y, z) = 0$  define implícitamente una función  $y = \varphi(x, z)$  (diferenciable) en un entorno del punto  $(x, z) = (1, 2)$  tal que  $f(x, \varphi(x, z), z) = 0$  para todo  $(x, z)$  en dicho entorno.

(b) Sea  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función diferenciable tal que  $Dg(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  y que cumple que  $g(2, -3) = (1, 2)$ . Sea  $v = (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}})$ . Calcular  $\frac{\partial(\varphi \circ g)}{\partial v}(2, -3)$ .

13. Para  $f(x, y) = x^2 - y^3$  muestre que, sobre la curva de nivel  $f(x, y) = 0$ , podemos despejar  $y$  en función de  $x$  (i.e.  $y = \phi(x)$ ). ¿Es  $\phi$  de clase  $C^1$  en un entorno del cero? ¿Puede aplicarse el teorema de la función implícita en el punto  $(0, 0)$ ?
14. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones
- (a)  $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad a = (2, 0)$
  - (b)  $g(x, y) = x^5 + y^2 + xy = 3 \quad a = (1, 1)$
  - (c)  $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad a = (0, 0, 2)$
15. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Probar que si existe  $p \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(p) = 0$  y  $\nabla f(p) \neq 0$ , entonces  $f$  se anula en infinitos puntos de  $\mathbb{R}^n$ .