

Práctica 3: Diferenciación

Aplicación de algunos resultados de diferenciación en una variable

1. Verificar que se cumple el teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:
 - (a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[1, 2]$.
 - (b) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ en el intervalo $[1, 3]$.
 - (c) $f(x) = \sin^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$.
2. Probar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x - 3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ pero no existe $c \in (1, 5)$ tal que $f'(c) = 0$ ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle?
3.
 - (a) Sea f un polinomio con al menos k raíces distintas, probar que f' tiene al menos $k - 1$ raíces distintas.
 - (b) Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.
 - (c) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{ax} + x^3 + x$ si $x \in \mathbb{R}$. Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.
4. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Demostrar las siguientes afirmaciones:
 - (a) Si $f' = g'$ en (a, b) , entonces $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.
 - (b) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente.
 - (c) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente.
5. Como una consecuencia del Teorema de Lagrange, mostrar que son válidas las siguientes acotaciones
 - (a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
 - (b) $|1/x - 1/y| \leq |x - y|$, para $x, y > 1$.
 - (c) $|\arctan a - \arctan b| \leq \frac{1}{2} |a - b|$, para $a, b \geq 1$.
6. Encontrar explícitamente el punto intermedio cuya existencia está garantizada por el teorema de Cauchy en el caso de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$.
7. Utilizando el teorema de Cauchy, calcular:
 - (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ donde $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x^2 - y^2} & \text{si } x \neq y, \\ -1/2 & \text{si } x = y. \end{cases}$

$$(b) \sup_{x,y \in [0,2]} f(x,y) \text{ donde } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4 - 4(x^3 - y^3) + 4(x^2 - y^2)}{y^2 - x^2} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

¿Cuanto vale $\sup_{x,y \in [1,2]} f(x,y)$?

Derivadas parciales y direccionales

8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $x = a$. Probar que f es derivable en $x = a$ si y solo si existe una única función afín $L(x) = m(x - a) + b$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - L(x)}{x - a} = 0.$$

Calcular el valor de m y de b . Al gráfico de $L(x)$ se la denomina la **recta tangente** a $f(x)$ en $x = a$.

9. Para cada una de las siguientes funciones $f(x,y)$, calcular la derivada direccional en la dirección de v en el punto (x_0, y_0)

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $v = (1, 0)$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ y $v = (0, 1)$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

(b) $f(x,y) = 2xy - 3x^2 + y - 5$, $v = (1, 1)$, $(x_0, y_0) = (2, 3)$ y $v = (1, 2)$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$

(c) $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2)$, $v = (0, 1, 0)$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$.

(d) $f(x,y) = (x+1)\text{sen } y - 2$, $v = (1, 0)$, (x_0, y_0) cualquiera.

(e) $f(x,y) = \|(x,y)\|$, $v = (a,b)$, $(x_0, y_0) = (0,0)$ con $\|(a,b)\| \neq 0$.

10. (a) Sea $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ y $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(2,1)$.

(b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$

(c) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para todo vector unitario v .

11. Calcular las funciones derivadas parciales de las siguientes funciones

(a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$;

(e) $f(x,y,z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$;

(b) $f(x,y,z) = ye^x + z$;

(f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$;

(c) $f(x,y) = x^2 \text{sen}^2(y)$;

(d) $f(x,y) = \text{sen } x$;

(g) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$.

12. Probar que la función $f(x,y) = |x| + |y|$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

13. Consideremos la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Probar que las únicas direcciones $v \in \mathbb{R}^2$ para las que existe la derivada direccional f_v en el origen son $v = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$. Probar, además, que la función no es continua en el origen.

14. Consideremos la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, f tampoco es continua en el origen.

15. Sea $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

(a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

(b) Mostrar que f es continua en $(0, 0)$.

Diferenciabilidad

16. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left(4 \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{y} \right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

$$17. \text{ Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Probar que en el origen f es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero f no es diferenciable.

$$18. \text{ Sea } f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$$

- (a) Encontrar ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las siguientes curvas en $t_0 = 0$:

$$\sigma_1(t) = (t + 1, 3, f(t + 1, 3)) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) = (t + 1, t + 3, f(t + 1, t + 3)).$$

- (b) Encontrar la ecuación de un plano $z = T(x, y)$ que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x, y) - T(x, y)}{\|(x, y) - (1, 3)\|} = 0.$$

19. Sea f diferenciable en $(1, 2)$ tal que $f(1, 2) = 3$, y sean además los vectores $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$. Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial v_1}(1, 2) = 3$ y que $\frac{\partial f}{\partial v_2}(1, 2) = 4$.

(a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

- (b) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(1, 2, f(1, 2))$.

20. Estudiar la existencia de plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos indicados. Si existe, escribir su ecuación.

(a) $f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1, 5)$ y en $(2, 2)$.

(b) $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(0, 0)$ y en $(16, 1)$.

(c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.

(d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$.

(e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en $(-1, 1)$.

(f) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3+x^2(y^2-6y+7)+(y-1)^2(6x+12-8y)}{x^2+2(y-1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$ en $(0, 1)$.

21. Usando la expresión del plano tangente para una función f adecuada, aproximar $(0, 99e^{0,02})^8$.

22. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar la respuesta.

- (a) Una función afín $f(x, y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, es diferenciable en todo punto de \mathbb{R}^2 .
- (b) El plano tangente de la función $f(x, y) = x^2 - xy + y^3$ en el punto $(1, 1)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 1, -1)$$

- (c) Si la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $(2, -1)$ con plano tangente

$$z = 2x - 3y + 2$$

entonces la función $g(x, y) = 3x - 2f(x, y) + 5$ es diferenciable en el punto $(2, -1)$ con plano tangente

$$z = -x + 6y + 1$$

- (d) El plano tangente de la función $f(x, y) = x^2 - 3xy^2 + y^3$ en el punto $(1, 2)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(1, -1, 4)$$

- (e) Si la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0, 1)$ y el plano tangente en el punto $(0, 1)$ de la función $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es $z = 0$ entonces la función $h(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x, y) = f(x, y) g(x, y)$$

es diferenciable en el punto $(0, 1)$.

- (f) Si la función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0, 0)$ entonces la función

$$g(x, y) = (x^2 + y^2)f(x, y)$$

es diferenciable en el punto $(0, 0)$ y su plano tangente es $z = 0$.

Interpretación geométrica del vector gradiente

23. Encontrar la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud $\|\nabla z\|$ en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.
24. Supongamos que la función $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x, y) . Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano xy son iguales a $(1, 0)$. ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?
25. (a) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

- (b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función

$$f(x, y) = 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 4 \cos(3y)$$

En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

26. Dada la función $f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^4$, verificar cada una de las siguientes afirmaciones:
- f crece en la dirección $(0, 1)$ desde el punto $(1, 1)$.
 - Desde el punto $(1, 1)$ el mayor crecimiento de f se da en la dirección $(2, 2)$.
 - Desde el punto $(1, 1)$, f decrece si nos movemos en la dirección $(-1, 0)$.
 - Desde el punto $(1, 1)$ crece en la dirección $(0, 1)$

Generalización a varias variables

27. Calcular el gradiente de f para

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$,

(b) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$,

(c) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

28. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$
- Verificar que T es una transformación lineal y calcular su matriz asociada (en las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3).
 - Calcular la matriz de la diferencial $DT(a)$ para $a \in \mathbb{R}^2$. Verificar que es la misma matriz que la hallada en (a).

29. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal.

- (a) Supongamos que T verifica

$$\lim_{v \rightarrow \vec{0}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = 0,$$

donde $\vec{0}$ denota el vector nulo. Probar entonces que T es la transformación lineal nula, es decir, para cada $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $T(w) = \vec{0}$.

- (b) Asumiendo que T es diferenciable, deducir que para cada $a \in \mathbb{R}^n$ la diferencial $DT(a)$ es igual a T .

30. Para cada una de las siguientes funciones, calcular $DF(a)$ para a en el dominio de F .

(a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$

- (b) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
 (c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$
 (d) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \|x\|^2$

Regla de la Cadena

31. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con derivada positiva en todo punto y

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty.$$

- (a) Probar que f es biyectiva
 (b) Usando el hecho que f^{-1} es derivable (no hace falta probarlo) concluir que, si $y \in \mathbb{R}$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Mostrar que la derivada de $g(x) = \arctan(x)$ es $\frac{1}{1+x^2}$.

32. Sean $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x, y) = x \sin(y)$. Además, tenemos la siguiente dependencia respecto de t ,

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \sin t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \sin t, y(t) = t,$$

donde t es una nueva variable. Bajo estas condiciones, calcular las derivadas respecto de t de las funciones

$$f(u(t), v(t), w(t)) \text{ y } g(x(t), y(t)),$$

en dos formas diferentes:

- (a) usando la regla de la cadena.
 (b) sustituyendo.

33. Sean $f(u, v) = e^{uv} \sin(u^2 + v^2)$, $g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$. Dadas

$$u(x, y) = x + y, \quad v(x, y) = xy, \quad w(x, y) = x - y + 1$$

calcular las derivadas parciales de las funciones

$$f(u(x, y), v(x, y)) \text{ y } g(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

- (a) usando la regla de la cadena.
 (b) sustituyendo.

34. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables y $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a) $F(x, y) = G(f(x)g(y), f(x)h(y))$ (b) $F(x, y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$
 (c) $F(x, y) = G(x, G(x, y))$ (d) $F(x, y) = f(x)^{g(y)}$ (si $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

35. (a) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}_{>0}$ es

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^p \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

diferenciable en \mathbb{R}^2 ? ¿Para qué valores de p es f de clase C^1 ?

(b) La función f se puede escribir como $g(x^2 + y^2)$ con $g(t) = t^p \operatorname{sen} \left(\frac{1}{t} \right)$ si $t > 0$ y $g(0) = 0$. ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de g ?

36. Sea $f(x, y)$ diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Se dice que f es homogénea de grado 1 si $\forall t > 0$ y $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ se verifica $f(t(x, y)) = tf(x, y)$. Probar que f es homogénea de grado 1 si y solo si

$$\nabla f(x, y) \cdot (x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

37. (a) Sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, donde B es una bola en \mathbb{R}^2 .

- i. Probar que si f es constante en B , entonces $\nabla f(a, b) = 0$, cualquiera sea $(a, b) \in B$.
- ii. Probar que si $\nabla f(a, b) = 0$ para cada $(a, b) \in B$, entonces f es constante en B . (*Sugerencia:* utilizar el Teorema de Valor Medio.)

(b) Si $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, y verifican que $\nabla f(a, b) = \nabla g(a, b)$ para todo $(a, b) \in B$, probar que entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = g(x, y) + c.$$