PRIMER PARCIAL - RESOLUCIÓN (Tema 2)

Ejercicio 1. Calcular, si existen, el ínfimo, mínimo, supremo y máximo de

$$A = \left\{ a_n = \frac{(-1)^n n + 6}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Resolución: Hay varias maneras de resolver este ejercicio. A continuación se presentan dos opciones que aparecieron en las resoluciones de los alumnos; la primera usa exclusivamente las definiciones de supremo e ínfimo, y la segunda otros resultados útiles. Para ambas opciones, comenzamos llamando $p_n = a_{2n}$ y $i_n = a_{2n-1}$ a las subsucesiones de los términos pares e impares, respectivamente. Es decir:

$$p_n = \frac{(-1)^{2n} 2n + 6}{2n+3} = \frac{2n+6}{2n+3} \qquad\qquad i_n = \frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)+6}{2n-1+3} = \frac{-2n+7}{2n+2}.$$

Siendo ambas sucesiones convergentes son, en particular acotadas y por lo tanto A es un conjunto acotado, y no vacío. Así, el axioma de completitud asegura la existencia de supremo e ínfimo.

- Opción 1: Motivados por las funciones homográficas asociadas a las sucesiones anteriores, acompañándonos de sus gráficos, proponemos

  1. $\max A = \max\{p_1; i_1\} = p_1 = a_2 = 8/5$.
     Es claro que $a_2 \in A$. Resta probar que es una cota superior: $a_n \leq a_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

     $$p_n \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow \frac{2n+6}{2n+3} \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow 5(2n+6) \leq 8(2n+3) \Leftrightarrow 30 - 24 \leq 16n - 10n \Leftrightarrow 6 \leq 6n \Leftrightarrow 1 \leq n;$$

     $$i_n \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow \frac{-2n+7}{2n+2} \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow 5(-2n+7) \leq 8(2n+2) \Leftrightarrow 35 - 16 \leq 16n + 10n \Leftrightarrow -1 \leq 26n.$$

     Observemos que en los pasos donde pasamos términos multiplicando, éstos eran positivos y no fue necesario invertir el orden de la desigualdad. Tenemos entonces probado que $8/5$ es el máximo del conjunto A y entonces también es el supremo.
  2. $\inf A = \min\{\lim_n p_n; \lim_n i_n\} = \min\{-1; 1\} = -1$
     Análogamente a lo hecho para el máximo, vamos a probar que -1 es cota inferior del conjunto: $a_n \geq -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que p_k es una sucesión de términos positivos, por lo cual $p_n \geq 0 > -1$. Miremos entonces la subsucesión de los términos impares:

     $$i_n \geq -1 \Leftrightarrow \frac{-2n+7}{2n+2} \geq -1 \Leftrightarrow -2n+7 \geq -(2n+2) \Leftrightarrow 7 \geq -2.$$

     Notemos que la desigualdad es estricta, por lo cual -1 no va a ser mínimo. Para probar que sí es ínfimo, falta ver que es la mayor de las cotas inferiores. En efecto, si tomamos un número real $c > -1$, del hecho que $a_{2k-1} \to -1$ se obtiene que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $a_{2n-1} \in (-1; c)$, entonces c no puede ser cota inferior ya que hay elementos del conjunto A que son mayores.

- Opción 2: Probemos que ambas subsucesiones son monótonas decrecientes:

  $$p_n \geq p_{n+1} \Leftrightarrow \frac{2n+6}{2n+3} \geq \frac{2(n+1)+6}{2(n+1)+3} \Leftrightarrow (2n+6)(2n+5) \geq (2n+8)(2n+3) \Leftrightarrow 4n^2+22n+30 \geq 4n^2+22n+24 \Leftrightarrow 30 \geq 24.$$

  Análogamente se prueba que i_n es decreciente. Entonces, si llamamos $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $I = \{i_n : n \in \mathbb{N}\}$, los primeros elementos de las sucesiones son los máximos de los conjuntos:

  $$\max P = p_1 \qquad\qquad \max I = i_1.$$

  Además son sucesiones acotadas, por ser convergentes. Luego, por el teorema de las sucesiones monótonas, convergen a sus respectivos ínfimos (y no son mínimos). Es decir:

  $$\inf P = \lim_n p_n = 1 \qquad\qquad \inf I = \lim_n i_n = -1$$

  Por último , como $A = P \cup I$, tenemos que $\max A = \max\{\max P; \max I\} = p_1 = 8/5$ e $\inf A = \min\{\inf P; \inf I\} = -1$.

Ejercicio 2.

a) Usando el teorema del valor medio, probar que $|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Resolución: Recordemos el TVM: *Sea* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *continua y derivable en* $(a; b)$, *entonces existe* $c \in (a; b)$ *tal que* $|f(b) - f(a)| = |f'(c)(b - a)|$. En nuestro caso, tomamos $f(x) = \sin(x)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$|\sin(b) - \sin(a)| \leq \underbrace{|cos(c)|}_{\leq 1} |b - a| \leq |b - a|.$$

b) Probar por definición que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \sin\left(\frac{x^{\frac{5}{3}} y}{x^2 + (y-1)^2}\right) - \sin\left(\frac{x^{\frac{5}{3}}}{x^2 + (y-1)^2}\right) = 0.$$

Resolución: Dado un $\varepsilon > 0$, buscamos un $\delta > 0$ tal que si $||(x, y - 1)|| < \delta$, entonces la función es, en módulo, menor que ε. Para empezar a acotar, aprovechamos el item (a):

$$\left|\sin\left(\frac{x^{\frac{5}{3}} y}{x^2 + (y-1)^2}\right) - \sin\left(\frac{x^{\frac{5}{3}}}{x^2 + (y-1)^2}\right)\right| \leq \left|\frac{x^{\frac{5}{3}} y}{x^2 + (y-1)^2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{x^2 + (y-1)^2}\right| = \frac{|x^{\frac{5}{3}}||y-1|}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{|x^{\frac{5}{3}}||y-1|}{||(x, y-1)||^2} \qquad (*)$$

Como $|x|, |y - 1| \leq ||(x, y - 1)||$, seguimos acotando:

$$(*) \leq \frac{||(x, y-1)||^{\frac{8}{3}}}{||(x, y-1)||^2} = ||(x, y-1)||^{\frac{2}{3}} < \delta^{\frac{2}{3}} < \varepsilon,$$

donde este último paso vale pidiendo $\delta < \varepsilon^{3/2}$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(y+2)x^n y^7}{|3x+y| + 2x^2 y^6} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Hallar TODOS los $n \in \mathbb{N}$ tales que f es continua en $(0, 0)$.
Resolución: f va a ser continua si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Veamos cuando pasa esto:

$$|f(x, y)| = \left|\frac{(y+2)x^n y^7}{\underbrace{|3x+y|}_{\geq 0} + 2x^2 y^6}\right| \leq \frac{|(y+2)x^n y^7|}{2x^2 y^6} = \frac{|y+2||x|^{n-2}|y|}{2} \to 0$$

si $n \geq 2$, ya que $|y|$ tiende a 0 y todo lo otro está acotado, **atención: esto vale siempre y cuando la x esté en el numerador, por lo cual en la simplificación anterior se puede hacer si $n \geq 2$.** Concluyamos entonces que f es continua para todo $n \geq 2$ terminando la cuenta anterior. Si tomamos $\delta < 1$, entonces

$$|y| < ||(x, y)|| < 1 \Longrightarrow -1 < y < 1 \Longrightarrow |y + 2| < 3$$

Finalmente entonces

$$|f(x, y)| \leq \frac{|y+2||x|^{n-2}|y|}{2} < \frac{3\delta^{n-2}\delta}{2} = \frac{3}{2}\delta^{n-1} < \epsilon$$

si elegimos $\delta < \min\ \{1,\ (\frac{2}{3}\epsilon)^{\frac{1}{n-1}}\}$. Por lo tanto, hemos demostrado que f es continua para todo $n \geq 2$.

Pero hasta ahora no probamos que f no sea continua para $n = 1$, es decir, simplemente la acotación que hicimos no prueba que el límite sea cero en el caso $n = 1$, pero tampoco lo contrario. Para probar que f no es continua si $n = 1$ hay que volver a la expresión original y encontrar una trayectoria por la cual el límite no sea 0. Elegimos justamente la trayectoria que anula la expresión que acotamos en el primer paso: $|3x + y| = 0$ si $y = -3x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{|2-3x||x||-3x|^7}{2x^2 3^6 x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{|2-3x|3^7}{2\ 3^6} = 3.$$

Entonces, f es continua si y sólo si $n \geq 2$.

b) Hallar TODOS los $n \in \mathbb{N}$ tales que f es diferenciable en $(0,0)$.

Resolución: Primero buscamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(h,0)}^{=0} - 0}{h} = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(0,h)}^{=0} - 0}{h} = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Para que f sea diferenciable entonces, debe valer:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - 0x - 0y|}{||(x,y)||} = 0.$$

Acotamos como en el item a):

$$\left|\frac{(y+2)x^n y^7}{(\underbrace{|3x+y|}_{\geq 0} + 2x^2y^6)||(x,y)||}\right| \leq \frac{|(y+2)x^n y^7|}{||(x,y)||2x^2y^6} = \frac{|y+2||x|^{n-2}\overbrace{|y|}^{\leq ||(x,y)||}}{2||(x,y)||} \leq \frac{|y+2||x|^{n-2}}{2} \to 0$$

si $n \geq 3$. Como hicimos para la continuidad, los otros valores de n hay que analizarlos aparte. Para $n = 1$, como f no era continua , no va a ser derivable. Para $n = 2$, calculamos el lï¿½mite por la misma trayectoria: $y = -3x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{|2-3x||x|^2|-3x|^7}{2x^2 3^6 x^6 \sqrt{10x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|2-3x|3^7}{2\ 3^6\sqrt{10}} \neq 0.$$

Entonces, f es diferenciable si y sólo si $n \geq 3$.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable de la que se sabe que la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(-1, f(-1))$ es $y = 3$, y en el punto $(2, f(2))$ es $y = x - 2$. Sea además, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(1 + e^3, -2) = 2$ y $\nabla g(1 + e^3, -2) = (3, 1)$. Decidir si existe la ecuación del plano tangente al gráfico de la función

$$H(x,y) = g(x^2 + e^{f(x)}, xye^{f(y)})$$

en el punto $(-1, 2, H(-1, 2))$ y, en caso afirmativo, dar dicha ecuación.

Resolución: H va a admitir plano tangente si y sólo si es diferenciable y esto es cierto pues es composición de funciones diferenciables. Además, el plano tiene ecuación:

$$z = H(-1,2) + \nabla H(-1,2)\cdot(x+1, y-2).$$

Para buscar las derivadas parciales de H aplicamos la regla de la cadena, para $H = g\circ F$, siendo $F(x,y) = (x^2+e^{f(x)}, xye^{f(y)})$, ambas funciones diferenciables.

$$\nabla H(x,y) = \nabla g(F(x,y))\cdot\begin{pmatrix} 2x+e^{f(x)}f'(x) & 0 \\ ye^{f(y)} & xe^{f(y)}(1+yf'(y)) \end{pmatrix}.$$

Para evaluar en $(x,y) = (-1,2)$ necesitamos los valores de f y f' en -1 y 2. Estos datos los conseguimos de las hipótesis sobre las rectas tangentes de f: $f(-1) = 3, f(2) = 0, f'(-1) = 0$ y $f'(2) = 1$. Reemplazando tenemos:

$$\nabla H(-1,2) = \nabla g(1+e^3,-2)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2e^{f(2)} & -e^{f(2)}(1+2f'(2)) \end{pmatrix} = (3,1)\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (-4,-3).$$

Entonces la ecuación del plano tangente es: $z = 2 - 4(x+1) - 3(y-2)$.