1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre: Mail:
Libreta: Turno: 10 a 13 16 a 19

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2014
Segundo recuperatorio del 1er Parcial (22/07/2014)

---

1. Sea $S \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ el subespacio de matrices A que satisfacen que cada una de sus filas y cada una de sus columnas suma exactamente lo mismo (*cuadrados semi-mágicos*), como por ejemplo la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 7 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, que satisface que cada una de sus filas y de sus columnas suma 6.

   (a) Probar que $S = \langle \mathrm{Id}_3 \rangle \oplus T$, donde $T \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ es el subespacio de matrices que satisfacen que cada una de sus filas y cada una de sus columnas suma exactamente 0. (Sug: si cada fila y cada columna de A suma k, considerar la matriz $A - k\,\mathrm{Id}_3$.)

   (b) Hallar la dimensión y una base de S.

---

2. Sean S y T los subespacios

$$S = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : \ P(0) = P'(0) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_4[X], \qquad T = \langle X^3 + X^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}_5[X],$$

y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_5[X]$ dada por $g(a,b,c) = aX^5 - bX^3 + cX^2$. Construir, si es posible, una transformación lineal $f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_5[X]$ tal que $f(S) \oplus T = \mathrm{Im}(g)$. ¿Es f un monomorfismo?

---

3. Sean A y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, entonces $\mathrm{rg}(A\cdot B) \geq \mathrm{rg}(B) - 1$.

---

4. Sean $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ su base dual. Sean $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que $[v_1]_{\mathcal{B}} = (1,1,0,0)$, $[v_2]_{\mathcal{B}} = (1,0,-1,-1)$ y $\langle v_3, v_4\rangle^\circ = \langle \varphi_1 + \varphi_2 - 3\varphi_3, \varphi_1 - \varphi_4\rangle$.
Calcular $\dim\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$.

---

5. Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, y sean S, T dos subespacios de V. Probar que si $p_S + p_T = p_{S+T}$, entonces $S \perp T$.

   (Aquí p_X es la proyección ortogonal c.r. al subespacio X.)

Justificar todas las respuestas