1	2	3	4	5

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE: MAIL:
LIBRETA: TURNO: 10 a 13 16 a 19

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2014
Primer recuperatorio del 1er Parcial (15/07/2014)

1. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sean S y T los subespacios de $\mathbb{R}_3[x]$ definidos por

$$S = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, P(2) = 0 \text{ y } (k-2)P(1)+P(k) = 0\}\,,\; T = \langle X^2+X-1,\, X^3+(2k-2)X^2,\, X^3+kX^2\rangle.$$

Determinar todos los valores de k para los cuales existe $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[x])$ que satisface simultáneamente $f(S) = T$ y $f(T) = S$, y para los valores de k hallados, definir tal f en alguna base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Sean $A, B \in K^{n\times n}$. Probar que si $K^n = \mathrm{Nu}(A) + E_c(B)$, entonces $E_c(A) = E_c(AB)$.

3. Sean $\varphi_i \in \mathbb{R}_2[X]^*$, $1 \leq i \leq 3$, dados por

$$\varphi_1(P) = (X \cdot P)(1), \quad \varphi_2(P) = (X \cdot P)'(1), \quad \varphi_3(P) = (X \cdot P)''(1), \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X].$$

   (a) Probar que $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$ y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$.

   (b) Sea $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[X]$. Determinar la matriz de cambio $C(\mathcal{C}^*, \mathcal{B}') \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

4. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3)^*$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$. Probar que f es un epimorfismo si y solo si $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ es un conjunto linealmente independiente en $(\mathbb{R}^3)^*$.

5. Sea en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ el producto interno canónico $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A \cdot B^t)$.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $S = \langle I, A\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (a) Calcular el complemento ortogonal $S^\perp$ de S.

   (b) Determinar el elemento de S más cercano a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y la distancia de B a $S^\perp$.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS