1	2	3	4	5

Calif.

Apellido y Nombre: Mail:
Libreta: Carrera:

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2014
Final (05/08/2014)

---

1. Sean U, V, W K-espacios vectoriales de dimensión finita, y $f \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Probar que $\dim(\mathrm{Nu}(g \circ f)) \leq \dim(\mathrm{Nu}(f)) + \dim(\mathrm{Nu}(g))$.

---

2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión *infinita*, y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Para cada $v \in \mathcal{B}$, sea $\varphi_v \in V^*$ dada por $\varphi_v(v) = 1$ y $\varphi_v(\omega) = 0$, para todo $\omega \in \mathcal{B}$ distinto de v.
   Probar que $V^* \neq \langle \varphi_v ; v \in \mathcal{B} \rangle$.

---

3. Sea $(V, \langle\, , \,\rangle)$ un K-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Deados $u, v \in V$, se define el endomorfismo $f_{u,v}$ de V por $f_{u,v}(\omega) = \langle \omega, v \rangle u$, $\forall\, \omega \in V$. Probar que
   (a) $f_{u,v}^* = f_{v,u}$.
   (b) $f_{u,v} \circ f_{\omega,z} = f_{u,\langle v,\omega\rangle z}$.
   (c) $\mathrm{tr}(f_{u,v}) = \langle u, v \rangle$.

---

4. Probar que si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son sus autovalores (eventualmente repetidos), entonces
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2.$$

---

5. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathrm{End}_K(V)$ tal que $m_f = p \cdot q$ con p, q polinomios irreducibles distintos en $K[\lambda]$.
   (a) Probar que existen $v, \omega \in V$ con $m_{v,f} = p$ y $m_{\omega,f} = q$.
   (b) Calcular $m_{v+\omega,f}$.

Justificar todas las respuestas