1	2	3	4

Calif.

Apellido y Nombre: Mail:
Libreta: Carrera:

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2014

Final (29/07/2014)

1. Sean $A, B \in K^{n\times n}$.
   (a) Probar que: $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B) \iff N(AB) = N(B)$.
   (b) Probar que: $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B) \iff N(A) \cap E_c(B) = \{0\}$.

---

2. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$.
   Se recuerda que $f^t \in \mathrm{End}_K(V^*)$ es el endomorfismo definido por $f^t(\varphi) = \varphi \circ f, \ \forall \varphi \in V^*$.
   (a) Probar que $(\mathrm{Im}(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$ y que $\mathrm{Im}(f^t) = (\mathrm{Nu}(f))^\circ$.
   (b) Probar que si $V = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, entonces $V^* = \mathrm{Nu}(f^t) \oplus \mathrm{Im}(f^t)$.

---

3. Lema de Schur: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A es unitariamente semejante a una matriz triangular superior, es decir existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $U^{-1}\,A\,U$ es una matriz triangular superior.

---

4. (a) Sea $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ con $m_A = \lambda^2 + 1$. Probar que A es semejante a $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Sea $k \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathbb{R}^{2k\times 2k}$ con $m_A = \lambda^2 + 1$ (ojo, A tiene coeficientes reales). Probar que A es semejante (sobre $\mathbb{C}$) a $\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_k \\ \mathrm{Id}_k & 0 \end{pmatrix}$.
   (En realidad es semejante sobre $\mathbb{R}$ pero no se pide probar eso.)

Justificar todas las respuestas