ALGEBRA LINEAL - 1er Cuatrimestre 2014

Práctica 7 - Transformaciones autoadjuntas

1. *a*) Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ definido por $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^3$ que sean f-invariantes.

   b) Sea $f_\theta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ la rotación de ángulo θ, es decir determinada por $e_1 \mapsto (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $e_2 \mapsto (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Probar que, para todo $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f_θ no es diagonalizable y hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

   c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ determinada por $e_1 \mapsto (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $e_2 \mapsto (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. ¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

2. Sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$, donde V es un K-e.v. de dimensión n, un endomorfismo nilpotente tal que $f^n = 0$ pero $f^{n-1} \neq 0$.

   a) Probar que si $v \notin \mathrm{Nu}(f^{n-1})$, entonces para $0 \leq k \leq n$ se tiene que $f^k(v) \in \mathrm{Nu}(f^{n-k})$ pero $f^k(v) \notin \mathrm{Nu}(f^{n-k-1})$, y que $\mathcal{B} = \{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ es una base de V.

   b) Determinar $[f]_{\mathcal{B}}$.

   c) Probar que para todo i, $0 \leq i \leq n$, existe un subespacio S_i de $\mathbb{R}^n$ de dimensión i que es f-invariante.

   d) Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

3. Calcular f^* para cada uno de los endomorfismos siguientes:

   a) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, $\quad f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

   b) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$, $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$

   c) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, para $\mathcal{B} = \big((1,2,-1), (1,0,0), (0,1,1)\big)$,

   d) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[X])]$ $\quad f(p) = p'$, $\quad$ donde $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

   e) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n\times n})$, $f(A) = P^{-1}AP$ donde $P \in GL(n, \mathbb{C})$ y $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$.

4. Sea $h \in \mathbb{R}[X]$ y sea $\mu_h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X])$ definido por $\mu_h(g) = h\,g$, $\forall\, g \in \mathbb{R}[X]$. Probar que existe, y calcular, μ_h^* para el producto interno $\langle g_1, g_2\rangle = \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx$.

5. Sea $(V, \langle\,,\,\rangle)$ un K-e.v. con p.i. de dimensión finita. Probar que:

   a) $(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^*$, $\forall\, f_1, f_2 \in \mathrm{End}_K(V)$ y $(k\,f)^* = \overline{k} f^*$, $\forall\, f \in \mathrm{End}_K(V)$, $k \in \mathbb{C}$;

   b) $(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*$, $\forall\, f_1, f_2 \in \mathrm{End}_K(V)$;

   c) $f \in \mathrm{Aut}_K(V) \Rightarrow f^* \in \mathrm{Aut}_K(V)$, y $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$;

   d) $(f^*)^* = f$, $\forall\, f \in \mathrm{End}_K(V)$;

   e) $f^* \circ f = 0 \Rightarrow f = 0$, $\forall\, f \in \mathrm{End}_K(V)$.

6. Sea $(V, \langle\,,\,\rangle)$ un K-e.v. con p.i. de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Probar que $\mathrm{Im}(f^*) = (\mathrm{Nu}(f))^\perp$ y $\mathrm{Nu}(f^*) = (\mathrm{Im}(f))^\perp$.

7. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ definido por $f(x,y,z) = (-x-3y-2z, 4x+6y+2z, -3x-3y)$. Hallar un producto interno $\langle\, , \,\rangle$ en $\mathbb{R}^3$ para el cual f sea autoadjunta.

8. Sea $(V, \langle\, , \,\rangle)$ un K-e.v. con p.i. de dimensión finita y sea S un subespacio de V. Probar que la proyección ortogonal $p_S : V \to V$ sobre S es autoadjunta, y calcular sus autovalores.

9. *a*) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal tal que $U^t A U$ sea diagonal para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

   b) Encontrar una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que $U^* A U$ sea diagonal, para

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i & 1 \\ -2i & 3 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Sea $(V, \langle\, , \,\rangle)$ un $\mathbb{C}$-e.v. con p.i. de dimensión finita y sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Se dice que f es *normal* cuando $f \circ f^* = f^* \circ f$. El objetivo de este ejercicio es probar que f es se diagonaliza en una base ortonormal si y solo si f es normal.

    a) Probar que si f es autoadjunta o unitaria, entonces f es normal.
    b) Probar que si f admite una base ortonormal de autovectores, entonces f es normal.
    c) Probar que si f es normal valen las siguientes afirmaciones:
       1) $\|f(v)\| = \|f^*(v)\|$, $\forall\, v \in V$. En particular, $\mathrm{Nu}(f) = \mathrm{Nu}(f^*)$.
       2) $\lambda\,\mathrm{Id} - f$ es normal, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$.
       3) $f(v) = \lambda\, v \;\Rightarrow\; f^*(v) = \overline{\lambda}\, v$.
       4) $\mathrm{Nu}(\lambda\,\mathrm{Id} - f)$ es f^*-invariante.
    d) Probar que si f es normal, entonces admite una base ortonormal de autovectores. (Sugerencia: observar que $(\mathrm{Nu}(\lambda\,\mathrm{Id} - f))^{\perp}$ es f-invariante y f^*-invariante).
    e) Deducir de lo anterior que las matrices unitarias son diagonalizables en $\mathbb{C}$. Encontrar un ejemplo de matriz ortogonal que *no* sea diagonalizable en $\mathbb{R}$.

11. Sea $A = U\Sigma V^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ una descomposición en valores singulares de A. Probar que las columnas de U son una base ortonormal de autovectores de $A\,A^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

12. Determinar una descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

13. $(\star)$ *Norma operador de una matriz*

    Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La siguiente definición

$$\|A\| := \sup\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \;:\; x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \right\}$$

(donde $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$) define una norma en $\mathbb{R}^{m\times n}$, llamada *norma operador* (que no proviene en este caso de un producto interno). De hecho se puede probar que aquí el supremo es un máximo, observando que $\|A\| := \sup\{\|Ax\| \,:\, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$.

Sea $\operatorname{rg}(A) = r > 0$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares de A con valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

a) Probar que $\|A\| = \sigma_1$. (Sug: Probar directamente que el máximo se alcanza en v_1, la primer columna de V, o bien probar que $\|A\| = \|\Sigma\|$ probando que para U unitaria, $\|Ux\| = \|x\|$, y probar que $\|\Sigma\| = \sigma_1$.)

b) Para $0 \leq k < r$, sea $A_k = U\Sigma_k V^t$ donde $\Sigma_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es la matriz diagonal con valores $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ en la diagonal, y 0 en el resto. Probar que

$$\operatorname{rg}(A_k) = k \quad \text{y} \quad \|A - A_k\| = \sigma_{k+1}.$$

c) Probar que la distancia de A a las matrices de rango $\leq k$ es σ_{k+1}, y está realizada por la matriz A_k. Es decir

$$\min\{\|A - B\| \,:\, \operatorname{rg}(B) \leq k\} = \|A - A_k\| = \sigma_{k+1}.$$

(Sug: Para probar que si $\operatorname{rg}(B) = k$ se tiene $\|A - B\| \geq \sigma_{k+1}$, probar que existe $x \in \langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle \cap N(B)$ no nulo con $\|x\| = 1$, y mostrar que $\|(B - A)x\| \geq \sigma_{k+1}$.)

14. *Condición de una matriz*

Sea $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Se define el *número de condición* (o la *condición*) de la matriz A con respecto a la norma operador definida en el ejercicio anterior como

$$\operatorname{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

La condición de A mide el máximo error relativo que se puede cometer cuando se quiere resolver el sistema lineal $Ax = b$ pero en su lugar se resuelve $Ax' = b'$ donde b' es el resultado de haber hecho un error de medición al calcular b. Se tiene

$$\frac{\|x' - x\|}{\|x\|} \leq \operatorname{Cond}(A)\frac{\|b' - b\|}{\|b\|}.$$

Sea $\operatorname{rg}(A) = r > 0$ y $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares de A con valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$. Probar que $\operatorname{Cond}(A) = \sigma_1/\sigma_n$.

15. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$. Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\|A\,v\| \geq 15\,\|v\|$.

16. Hallar la matrices de rango 1 y 2 más cercanas, con la distancia en $\mathbb{R}^{n\times n}$ dada por la norma operador, a la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

17. *Inversa de Moore-Penrose y Cuadrados Mínimos*
Dada una matriz diagonal $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con elementos diagonales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, se define la *pseudoinversa* o *inversa de Moore-Penrose* de Σ como la matriz $\Sigma^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ que se obtiene invirtiendo los elementos no nulos de Σ y trasponiendola,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \\ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \Rightarrow \quad \Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1/\sigma_r & \\ & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Sea $A = U\Sigma V^t$ una descomposición en valores singulares de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se define la *pseudo-inversa* o *inversa de Moore-Penrose* de A como la matriz $A^\dagger := V\Sigma^\dagger U^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

a) Calcular $A^\dagger A$ cuando $\mathrm{rg}(A) = n$ y $A\,A^\dagger$ cuando $\mathrm{rg}(A) = m$.

b) *Cuadrados mínimos*
Sea $b \in \mathbb{R}^m$. El sistema $Ax = b$ puede no ser compatible. Se quiere hallar $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisface

$$\|A\overline{x} - b\| = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|. \qquad (1)$$

- Probar que si $\mathrm{rg}(A) = n$, existe un único $\overline{x}$ que satisface (1), y es $\overline{x} = A^\dagger b$.
- Si $\mathrm{rg}(A) < n$, entonces $\overline{x}$ no es única. ¿Por qué? Probar que en ese caso, $\overline{x} = A^\dagger b$ es la única solución de (1) que pertenece a $N(A)^\perp$, y por lo tanto es la solución de norma mínima (i.e. $\|\overline{x}\| \leq \|x\|, \forall\, x$ solución de (1)).

18. Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

a) f rotación en $\mathbb{R}^2$ de ángulo $\pi/3$.

b) f simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto de la recta de ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

c) f simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

d) f rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo $\pi/4$ y eje $\langle(1, 0, 1)\rangle$.

19. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
Decidir si f es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

20. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$.

a) Probar que f es una rotación.

b) Hallar $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $g \circ g = f$.

21. Sea f una rotación en $\mathbb{R}^3$ de y ángulo $\pi/2$ y eje $\langle(2,-2,-1)\rangle$ Hallar $f(4,-1,1)$.

22. Determinar si es posible una rotación f en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$f(\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}) = \langle(1,1,-1);(2,-1,1)\rangle.$$

23. Determinar y clasificar todas las transformaciomes ortogonales

    a) f en $\mathbb{R}^2$ tales que $f(3,4) = (5,0)$.

    b) f en $\mathbb{R}^3$ tales que $f(1,-1,0) = (1,-1,0)$ y $f(3,1,1) = (-1,-3,-1)$.

24. Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se llama *isometría* si satisface que

$$d(x,y) = d(f(x),f(y)) \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^2.$$

    a) Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que $f(0) = 0$, f resulta una transformación lineal y además f es ortogonal.

    b) Deducir que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría si y sólo si existen g transformación ortogonal en $\mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$ tales que $f(x) = g(x) + v$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$.