Forma de Jordan

I Matrices nilpotentes

Definición (Matriz nilpotente)

- Sea $A \in K^{n\times n}$. A es nilpotente si $\exists k \in \mathbb{N}: A^k = 0$
- Sea V un K-e.v. y $f \in End_K(V)$. f es nilpotente si $\exists k \in \mathbb{N}: f^k = 0$

(En dim finita: f nilpotente $\Leftrightarrow [f]_{\mathcal{B}}$ nilpotente, $\forall \mathcal{B}$ base de V)

Observación Sea $A \in K^{n\times n}$, sea V K-e.v de dim finita y $f \in End_K(V)$

A es nilpotente $\Leftrightarrow m_A(\lambda) = \lambda^m$ para algún $m \leq n$

(f es nilpotente $\Leftrightarrow m_f(\lambda) = \lambda^m$ para algún $m \leq \dim(V)$)

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \in K^{n\times n}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación Sea $A \in K^{n\times n}$ nilpotente. Entonces

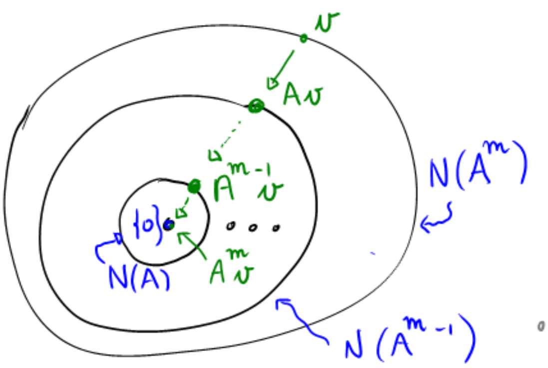
① $\exists i, 1 \leq i \leq n$, tq $m_{e_i} = m_A$

pues para $1 \leq i \leq n$, $m_{e_i} = \lambda^{m_i}$ pues $m_{e_i} \mid m_A$

luego $m_A = mcm(m_{e_1}, \dots, m_{e_n}) = \lambda^{\max\{m_1, \dots, m_n\}} = m_{e_i}$ para algún i

② Si $m_A = \lambda^m$, entonces $\{0\} \subsetneq N(A) \subsetneq N(A^2) \subsetneq \dots \subsetneq N(A^{m-1}) \subsetneq N(A^m) = K^n$

pues si $m_A = m_v = m_{\langle v \rangle_A}$, entonces



$$\underbrace{v \mapsto Av \mapsto \dots \mapsto A^{m-1}v}_{li} \mapsto A^m v = 0$$

$v \in N(A^m)$ pero $v \notin N(A^{m-1})$,

$Av \in N(A^{m-1})$ pero $Av \notin N(A^{m-2})$, ...

..., $A^{m-1}v \in N(A)$ pero $A^{m-1}v \neq 0$

Forma de Jordan de $A \in K^{2\times 2}$ nilpotente

$A \in K^{2\times 2}$: $m_A = \lambda$ o $m_A = \lambda^2$

- Si $m_A = \lambda$, eso significa $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Si $m_A = \lambda^2$, eso quiere decir $A \neq 0$ pero $A^2 = 0$.
  Existe v $(= e_1$ o $e_2)$ tq $m_A = m_v = m_{\langle v \rangle_A}$, i.e. $\{v, Av\}$ li y $A^2 v = 0$. Luego $\mathcal{B} = (v, Av)$ es base y en esa base
  $[f_A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. I.e. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1} A P$ con $P = [v \mid Av]$

Forma de Jordan de $A \in K^{3\times 3}$ nilpotente

$A \in K^{3\times 3}$ con $m_A = \lambda$ ó $m_A = \lambda^2$ ó $m_A = \lambda^3$

- Si $m_A = \lambda$, eso significa $A = 0 \in K^{3\times 3}$

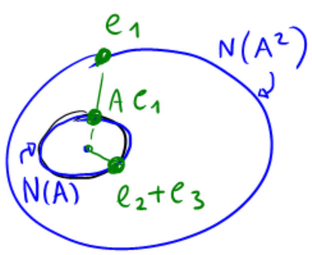
- Si $m_A = \lambda^3$, eso significa $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$ y $A^3 = 0$
  Existe v $(= e_1$ ó e_2 ó $e_3)$ tq $m_A = m_{\langle v \rangle_A}$, i.e. $\{v, Av, A^2v\}$ li y $A^3 v = 0$. Luego $\mathcal{B} = (v, Av, A^2v)$ es base y en esa base
  $[f_A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, I.e. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1} A P$ con $P = [v \mid Av \mid A^2 v]$

- Si $m_A = \lambda^2$, eso significa $A \neq 0$ pero $A^2 = 0$.
  <u>Ejemplo</u> (por ahora) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  $e_1 \mapsto e_1 + e_2 \mapsto e_1 + e_2 - e_1 - e_2 = 0$
  $e_2 \mapsto -e_1 - e_2 \mapsto -e_1 - e_2 + e_1 + e_2 = 0$
  $e_3 \mapsto e_1 + e_2 \mapsto 0$

  $m_A = \lambda^2$ y $\langle e_1 \rangle_A = \langle \underbrace{e_1, Ae_1 = e_1 + e_2}_{li} \rangle$

  Resulta que aquí existe otro vector en $N(A)$ li con e_1 y $e_1 + e_2$:
  $e_2 + e_3 \in N(A)$.



Luego en la base $\mathcal{B} = (e_1, Ae_1, e_2 + e_3)$ se tiene

$$[f_A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ o sea } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1} A P$$

con $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vamos a probar que siempre es así!

Forma de Jordan de matrices nilpotentes

Bloques de Jordan nilpotentes

$$J(0,m) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times m}$$

$(J(0,1) = \boxed{0})$

- $m_{J(0,m)} = \lambda^m$
- $rg(J(0,m)) = m-1$
- $\dim(N(J(0,m))) = 1$
- $rg(J^2(0,m)) = m-2$ etc....

Teorema (forma de Jordan de una matriz nilpotente)

Sea $A \in K^{n\times n}$ nilpotente. Entonces $A \simeq J$ donde

$$J = \begin{pmatrix} J(0,m_1) & & & \\ & J(0,m_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(0,m_r) \end{pmatrix} \quad \text{con } m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r \geq 1$$

Y además a una sola de ellas!

Hagamos un par de ejemplos a ver como funciona antes de hacer la demostración.

Ejemplos

① $A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

$e_1 \mapsto e_3+e_4 \mapsto e_4 \mapsto 0$

$e_2 \mapsto e_4 \mapsto 0$

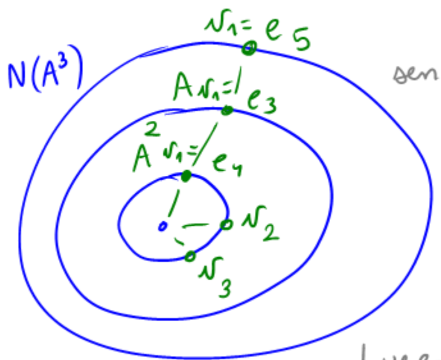
$e_3 \mapsto e_4 \mapsto 0$

$e_4 \mapsto 0$

$e_5 \mapsto e_3 \mapsto e_4 \mapsto 0$

$\left.\begin{array}{l} m_{e_1} = \lambda^3 \\ m_{e_2} = \lambda^2 \\ m_{e_3} = \lambda^2 \\ m_{e_4} = \lambda \\ m_{e_5} = \lambda^3 \end{array}\right\} \quad m_A = \lambda^3$

Luego por ejemplo $\{e_1, e_3+e_4, e_4\}$ que son li van a formar un bloque de tamaño 3, o también $\{e_5, e_3, e_4\}$ (Pero fijarse que no se pueden usar los 2 pues ya no son li. El 2do parece + sencillo. Sea $v_1 := e_5$. Nos falta el resto. ¿Será $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ o $\boxed{0}\ \boxed{0}$?



$$\begin{pmatrix} 0&0&0& \\ 1&0&0& \\ 0&1&0& \\ &&& ? \end{pmatrix}$$

Si es lo primero, entonces es que $\dim(N(A)) = 2$

Mientras que si es lo 2do, $\dim(N(A)) = 3$.

$Rg(A) = 2 \Rightarrow \dim(N(A)) = 3$

Luego buscamos v_2 y v_3 li con e_5, e_3, e_4 en $N(A)$

Se ve que sirven $v_2 = e_1 - e_5$ y $v_3 = e_2 - e_3$ que pertenecen a $N(A)$ y son li con el resto. Luego $A \simeq J$ con

$$J = \begin{bmatrix} 0&0&0&&\\ 1&0&0&&\\ 0&1&0&&\\ &&&0&\\ &&&&0 \end{bmatrix}$$

y la base de Jordan es, por ejemplo,

$$\mathcal{B} = (\underset{v_1}{e_5}, \underset{Av_1}{e_3}, \underset{A^2v_1}{e_4}, \underset{v_2}{e_1 - e_5}, \underset{v_3}{e_2 - e_3})$$

(o sea $J = P^{-1} A P$ con $P = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&-1\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&-1&0 \end{bmatrix}$)

2

$$A = \begin{bmatrix} 0&1&2&0&2&0\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \mapsto 0 \\ e_2 \mapsto e_1 \mapsto 0 \\ e_3 \mapsto 2e_1 \mapsto 0 \\ e_4 \mapsto 2e_2 + e_3 \mapsto 2e_1 + 2e_1 \mapsto 0 \\ e_5 \mapsto 2e_1 + e_3 \mapsto 2e_1 \mapsto 0 \\ e_6 \mapsto 0 \end{array}\right\} m_A = \lambda^3$$

El bloque de mayor tamaño va a ser un bloque de tamaño 3

$$J = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{matrix} & \\ & ? \end{bmatrix} \leftarrow \underset{(a)}{\begin{bmatrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{bmatrix}} \text{ ó } \underset{(b)}{\begin{bmatrix} 0&0\\ 1&0 \end{bmatrix} [0]} \text{ ó } \underset{(c)}{[0]\,[0]\,[0]} \ ?$$

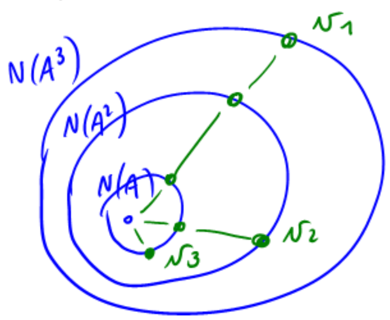
De nuevo en c/caso cambia la dim $(N(A))$

Caso (a): $\dim(N(A)) = 2$, Caso (b): $\dim(N(A)) = 3$, Caso (c): $\dim(N(A)) = 4$

Fijarse que $\dim(N(A)) = n - rg(A)$ me da la cantidad de bloques!

Y aquí por suerte me dice además cómo son, porque no hay lugar para por ejemplo $\underset{(d)}{\begin{bmatrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{bmatrix} [0]}$ y $\underset{(e)}{\begin{bmatrix} 0&0\\ 1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0\\ 1&0 \end{bmatrix}}$ ... En ese caso tengo que mirar $N(A^2)$ que cambia: en (d) es 1 y en (e) es 0...

Aquí $\dim(N(A)) = 3$ pues $rg(A) = 3$, o sea estamos en (b). Buscamos:



Seguramente para v_1 podemos elegir e_4 ó e_5 que realizan el minimal, pero luego para v_2 nos gustaría elegir e_2 ó e_3 pero no se puede pues $e_2, e_3 \mapsto k e_1$ y e_1 ya está en la serie de e_4 ó e_5 ....

Una forma sistemática de hacerlo (a ojo aquí parece complicado), y que funciona aún sin conocer a priori los bloques de Jordan.

Completamos una base de $N(A^2)$ a $N(A^3) = K^6$

(Aquí ya sabemos $\dim(N(A^2))$ pero se calcula fácil A^2 de hecho:

$N(A^2)$?

$e_1 \mapsto 0$

$e_2 \mapsto 0$

$e_3 \mapsto 0$

$e_4 \mapsto 4e_1$

$e_5 \mapsto 2e_1$

$e_6 \mapsto 0$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N(A^2) = \langle e_1, e_2, e_3, e_6, e_5 - 2e_4 \rangle$$

Y se completa a K^6 con por ejemplo e_5 o e_4 que están en $N(A^3) - N(A^2)$ (o sea li con $N(A^2)$). Elegimos $v_1 = e_5$, luego $\underbrace{Av_1}_{= 2e_1+e_3}, \underbrace{A^2v_1}_{= 2e_1} \in N(A^2)$

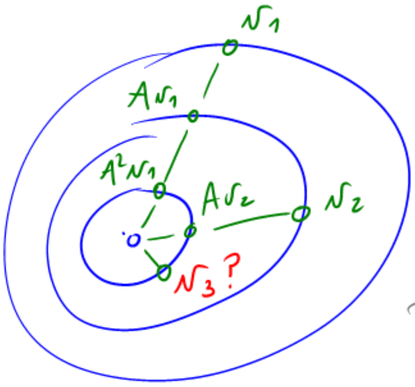
$$K^6 = N(A^3) = N(A^2) \oplus \langle v_1 \rangle$$

$$\langle \underbrace{2e_1+e_3}_{= Av_1 \notin N(A)}, \underbrace{2e_1}_{\in N(A)}, e_2, e_6, e_5 - 2e_4 \rangle \oplus \langle v_1 \rangle$$

$N(A) = \langle e_1, e_6, e_3 - 2e_2 \rangle$: $N(A^2) = N(A) \oplus \langle Av_1, v_2 \rangle$

Podemos elegir $v_2 := e_5 - 2e_4$ para completar $N(A^2)$

Probaremos enseguida que $\{Av_1, v_2\} \subseteq N(A^2)$ li y tq $N(A) \cap \langle Av_1, v_2 \rangle = \{0\}$
$\Rightarrow$ $\{A^2v_1, Av_2\}$ li también (y al estar en $N(A)$, li con todo lo que está a un nivel superior). Hasta ahora tenemos



$v_1 = e_5$, $Av_1 = 2e_1 + e_3$, $A^2v_1 = 2e_1 \in N(A)$

$v_2 = e_5 - 2e_4$, $Av_2 = 2e_1 - 4e_2 - e_3 \in N(A)$

Falta alguien más li en $N(A)$

$$N(A) = \langle\langle A^2v_1, Av_2, ? \rangle$$

Podemos elegir $v_3 = e_6$ para completar $N(A)$

Luego para $\mathcal{B} = (v_1, Av_1, A^2v_1, v_2, Av_2, v_3, Av_3)$ tenemos $A \cong J$.

Con
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$
. i.e $J = P^{-1}AP$ con
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resumen

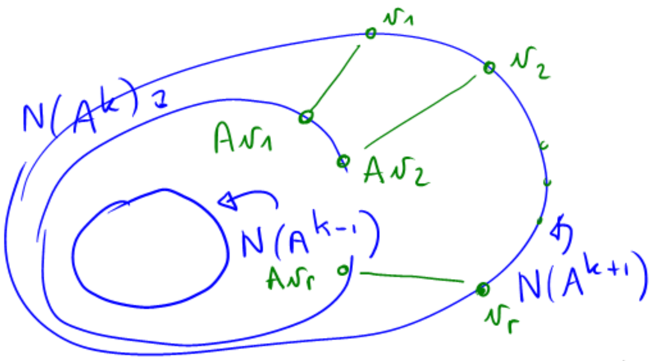
$$K^3 = N(A^3) = N(A^2) \oplus \langle v_1 \rangle$$

$$\overbrace{N(A) \oplus \langle Av_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle}^{= N(A^2)} \oplus \langle v_1 \rangle$$

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{\langle A^2v_1, Av_2 \rangle \oplus \langle v_3 \rangle}^{N(A)} \oplus \langle Av_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle}_{N(A^2)} \oplus \langle v_1 \rangle}_{N(A^3)}$$

Antes de hacer la demo del teorema probemos el siguiente lema:

Lema Sea $A \in K^{n\times n}$ nilpotente con $m_A(\lambda) = \lambda^m$. Sea $k, 1 \leq k < m$ y sea $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq N(A^{k+1})$ un conjunto li que satisface
$$\langle v_1, \dots, v_r \rangle \cap N(A^k) = \{0\}.$$
Entonces $\{Av_1, \dots, Av_r\} \subseteq N(A^k)$ es un conjunto li y satisface
$$\langle Av_1, \dots, Av_r \rangle \cap N(A^{k-1}) = \{0\}$$



Demostración

① $\alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_r Av_r = 0 \Rightarrow$
$A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = 0 \Rightarrow$
$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in N(A) \subseteq N(A^k)$
$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$

② $v = \alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_r Av_r \in N(A^{k-1}) \Rightarrow A^{k-1}(\alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_r Av_r) = 0 \Rightarrow$
$A^k(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in N(A^k)$
pero $\langle v_1, \dots, v_r \rangle \cap N(A^k) = \{0\} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0$
$\underset{li}{\Rightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 \Rightarrow v = \alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_r Av_r = 0$

Demostración del teorema Existencia

Hacemos la construcción que hicimos en el ejemplo. Si $m_A = \lambda^m$,
① Completamos $N(A^{m-1})$ a una base de $N(A^m) = K^n$:
O sea $K^n = N(A^m) = N(A^{m-1}) \oplus \langle v_{11}, \dots, v_{1r_1} \rangle$
Se observa $\{Av_{11}, \dots, Av_{1r_1}\} \subseteq N(A^{m-1})$ y es li pues estamos en las condiciones del lema anterior: $N(A^{m-1}) \cap \langle v_{11}, \dots, v_{1r_1} \rangle = \{0\}$
Más aún (para seguir la construcción) $N(A^{m-2}) \cap \langle Av_{11}, \dots, Av_{1r_1} \rangle = \{0\}$.
② Completamos $N(A^{m-2})$ a una base de $N(A^{m-1})$ usando $Av_{11}, \dots, Av_{1r_1}$:
O sea $N(A^{m-1}) = N(A^{m-2}) \oplus \langle Av_{11}, \dots, Av_{1r_1}, v_{21}, \dots, v_{2r_2} \rangle$
Por el lema anterior $\{A^2v_{11}, \dots, A^2v_{1r_1}, Av_{21}, \dots, Av_{2r_2}\} \subseteq N(A^{m-2})$ es li
(y además $N(A^{m-3}) \cap \langle A^2v_{11}, \dots, A^2v_{1r_1}, Av_{21}, \dots, Av_{2r_2} \rangle = \{0\}$)
A este nivel observamos que tenemos: $K^n = \underbrace{N(A^{m-2}) \oplus \langle Av_{11}, \dots, v_{2r_2} \rangle}_{N(A^{m-1})} \oplus \langle v_{11}, \dots, v_{1r_1} \rangle$

(m-1) $N(A^2) = N(A) \oplus \langle A^{m-2}v_{11}, \dots, A^{m-2}v_{1r_1}, \dots \dots, v_{m-1\,1}, \dots, v_{m-1\,r_{m-1}} \rangle$

Con $\{A^{m-1}v_{11}, \dots, A^{m-1}v_{1r_1}, \dots, Av_{m-1\,1}, \dots, Av_{m-1\,r_{m-1}}\}$ li en $N(A)$.

(m) Completamos a una base de $N(A)$ y luego juntamos todo:

$$N(A) = \langle A^{m-1}v_{11}, \dots, A^{m-1}v_{1r_1}, \dots, Av_{m-1\,1}, \dots Av_{m-1\,r_{m-1}}, v_{m1}, \dots, v_{mr_m} \rangle$$

y finalmente obtuvimos:

$$K^m = \{ \underbrace{v_{11}, \dots, A^{m-1}v_{11}}_{\text{bloque de tamaño } m}, \dots \underbrace{v_{1r_1}, \dots, A^{m-1}v_{1r_1}}_{\text{bloque de tamaño } m}; \underbrace{v_{21}, \dots, A^{m-2}v_{21}}_{\text{bloque de tamaño } m-1}, \dots, \underbrace{v_{2r_2}, \dots, A^{m-2}v_{2r_2}}_{\text{bloque de tamaño } m-1},$$

$$\dots, \underbrace{v_{m-1\,1}, Av_{m-1\,1}}_{\text{bloque de tamaño } 2}, \dots, \underbrace{v_{m-1\,r_{m-1}}, Av_{m-1\,r_{m-1}}}_{\text{bloque de tamaño } 2}; v_{m1}, \dots, v_{mr_m} \rangle$$

bloques de tamaño 1 $\boxtimes$

<u>DIAGRAMA GENERAL</u> $A \in K^{n\times n}$ tq $m_A = \lambda^m$

$$K^m = N(A^m) = \overbrace{N(A^{m-1})} \oplus \langle v_{11}, \dots, v_{1r_1} \rangle$$

$$= \overbrace{N(A^{m-2}) \oplus \langle Av_{11}, \dots, Av_{1r_1} \rangle \oplus \langle v_{21}, \dots, v_{2r_2} \rangle}^{N(A^{m-1})} \oplus \langle v_{11}, \dots, v_{1r_1} \rangle$$

$$= \overbrace{N(A^{m-3}) \oplus \langle A^2v_{11}, \dots, A^2v_{1r_1}, Av_{21}, \dots, Av_{2r_2} \rangle \oplus \langle v_{31}, \dots, v_{3r_3} \rangle}^{N(A^{m-2})} \oplus \langle Av_{11}, \dots, Av_{1r_1} \rangle \oplus \langle v_{21}, \dots, v_{2r_2} \rangle \oplus \langle v_{11}, \dots, v_{1r_1} \rangle$$

$$\vdots$$

$$= N(A) \oplus \dots \oplus \langle v_{11}, \dots, v_{1r_1} \rangle$$

$$= \overbrace{\langle A^{m-1}v_{11}, \dots, Av_{m-1\,r_{m-1}} \rangle \oplus \langle v_{m1}, \dots, v_{mr_m} \rangle}^{N(A)} \oplus \dots \oplus \langle v_{11}, \dots, v_{1r_1} \rangle$$

Para la unicidad, observemos que pasa con los rangos de $A, A^2, \dots, A^m$ y su relación con la forma de Jordan, para mostrar que dos matrices en forma de Jordan distintas no pueden ser semejantes.

Llamemos $c_k :=$ # bloques de Jordan $J(0,k)$ de tamaño exactamente k que aparecen en la forma de Jordan de A.

Está claro que si $A \in K^{n\times n}$ es tq $m_A(\lambda) = \lambda^m$, entonces cuando hacemos $A^{m-1} \simeq J^{m-1}$, mueren todos los bloque $J(0,k)$ con $k \leq m-1$ y sobrevive 1 "1" por bloque $J(0,m)$. Luego

$rg(A^{m-1}) = c_m$ (x cada bloque de tamaño m sobrevive 1 "1" en $J(0,m)^{m-1}$ y los otros bloques mueren)

$rg(A^{m-2}) = c_{m-1} + 2c_m$ ⟶ c/bloque aporta 2 "1" en A^{m-2}
⟶ c/bloque aporta 1 "1" en A^{m-2}

$\vdots$

$rg(A^2) = c_3 + 2c_4 + \dots + (m-2)c_m$.

$rg(A) = c_2 + 2c_3 + \dots + (m-1)c_m = n - \#\text{bloques} = n - (c_1 + \dots + c_m)$

También: $n = c_1 + 2c_2 + \dots + mc_m$

Esto implica

Proposición: (Unicidad de la forma de Jordan para A nilpotente)

① Sean J, J' dos matrices nilpotentes en $K^{n\times n}$ en forma de Jordan. Entonces

$$J \simeq J' \Rightarrow J = J'$$

② Sea $A \in K^{n\times n}$ nilpotente. Entonces la forma de Jordan de A es única.

③ Sean $A, B \in K^{n\times n}$ nilpotentes. Entonces

$$A \simeq B \iff J_A = J_B$$

Demostración

Alcanza con probar ①. $J \simeq J'$ en $K^{n\times n} \Rightarrow m_J = m_{J'}$. Sea λ^m ese minimal. El bloque de tamaño máximo de J y J' es $J(0,m)$. ¿por qué?

Se tiene $rg(J^{m-1}) = rg(J'^{m-1}) \Rightarrow c_m(J) = c_m(J')$

$\Rightarrow c_{m-1}(J) = c_{m-1}(J')$ pues $rg(J^{m-2}) = rg(J'^{m-2})$ etc...

llegamos a $c_2(J) = c_2(J')$ y finalmente $c_1(J) = c_1(J')$

es lo que queda ... $(rg(A) = n - (c_1 + \dots + c_n))$ ☒

Se puede jugar con esos números y probar:

Proposición

Sea $A \in K^{n\times n}$ nilpotente con $m_A(\lambda) = \lambda^m$. Sea $A^0 := Id_n$.

Entonces

① Para $1 \le k \le m$, la cantidad de bloques de Jordan de A de tamaño $\geq k$ es igual a $rg(A^{k-1}) - rg(A^k)$

② $c_k = rg(A^{k-1}) - 2\,rg(A^k) + rg(A^{k+1})$ para $1 \le k \le m$.