Autoespacios

- Sea V un K-e.v y sea $f \in End_K(V)$. Entonces, $\forall \lambda \in K$,

$\lambda . Id - f \in End_K(V)$: $(\lambda . Id - f)(v) = \lambda v - v$, $\forall v \in V$

Y por lo tanto $Nu(\lambda . Id - f)$ es un subespacio de V

i.e si $v, w \in Nu(\lambda Id - f)$, $k \in K$, entonces $v + w$, $kv \in Nu(\lambda Id - f)$

Se observa que si $\dim_K(V) = n$ y $\mathcal{B}$ es base de V,

$$[\lambda Id - f]_{\mathcal{B}} = \lambda . Id_n - [f]_{\mathcal{B}}$$

- De la misma forma, si $A \in K^{n \times n}$, entonces, $\forall \lambda \in K$,

$\lambda Id_n - A \in K^{n \times n}$ y $N(\lambda Id_n - A)$ es un subespacio de K^n

Resumiendo

Sea V un K-e.v, $f \in End_K(V)$, sea $A \in K^{n \times n}$

1. $\lambda_0 \in K$ es autovalor de $f \iff \exists v \neq 0 : f(v) = \lambda_0 v \iff \dim(\underbrace{Nu(\lambda_0 Id - f)}_{\text{autoespacio asociado al a.v. } \lambda_0}) \geq 1$, y todo $v \in Nu(\lambda_0 Id - f)$ no nulo es autovector de f asociado a λ_0
2. Si $\dim(V) < \infty$, además, $\iff \lambda_0$ es raíz de $\chi_f(\lambda)$
3. $\lambda_0 \in K$ es autovalor de $A \iff \exists x \neq 0 : Ax = \lambda_0 x \iff \dim(\underbrace{N(\lambda_0 Id_n - A)}_{\text{autoespacio asociado al av } \lambda_0}) \geq 1 \iff \chi_A(\lambda_0) = 0$

De los ejemplos estudiados, parece ocurrir que si $\lambda_0 \in K$ es raíz de $\chi_A(\lambda)$ de multiplicidad m, entonces $\dim(N(\lambda Id_n - A)) \leq m$.

Esto vale en general:

Proposición (dimensión del autoespacio y multiplicidad)

1. Sea V un K-e.v de dim finita y sea $f \in End_K(V)$. Sea $\lambda_0 \in K$ una raíz de $\chi_f(\lambda)$ de multiplicidad m, entonces

$$1 \leq \dim(Nu(\lambda_0 Id - f)) \leq m$$

2. Sea $A \in K^{n \times n}$, y sea $\lambda_0 \in K$ una raíz de $\chi_A(\lambda)$ de multiplicidad m, entonces $1 \leq \dim(N(\lambda_0 Id_n - A)) \leq m$

Demostración: Alcanza con probar 1 para V K-e.v de dim. n

Sea $\mathcal{B}$ base de V que completa a $(v_1, .., v_s)$ base de $Nu(\lambda_0 Id - f)$.

$s \geq 1$ por ser λ_0 autovalor

y $$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c c} \left[\begin{array}{ccc:c} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \lambda_0 & \\ & 0 & & \end{array}\right] & \begin{array}{l} \updownarrow s \\ \\ \updownarrow n-s \end{array} \\ \leftarrow s \rightarrow \; \leftarrow n-s \rightarrow & \end{array} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0 \end{matrix} & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$ y por lo tanto

$\chi_f(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^s \chi_B(\lambda)$. Luego $\dim(Nu(\lambda_0 Id - f)) = s \leq m$. $\boxed{X}$ ②

Por lo tanto, teniendo en cuenta que f (resp A) se diagonaliza si y solo si hay una base de autovectores y que cada autovector se corresponde con un autovalor λ_i de multiplicidad m_i, para que f (resp A) se diagonalice necesitamos

① que $\chi_f(\lambda)$ se factorice linealmente en $K[\lambda]$, es decir
$\exists\, \lambda_1, .., \lambda_r \in K$ tq $\chi_f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_r)^{m_r}$
(asumimos $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, luego $m_i = mult(\lambda_i ; \chi_f)$)

② $\dim(Nu(\lambda_i Id - f)) = m_i$, $1 \leq i \leq r$

Pero necesitamos además obtener una base $\mathcal{B}$ de V juntando las bases $\mathcal{B}_i$ de $Nu(\lambda_i Id - f)$ para que sea un si y solo si.
O sea necesitamos en general un resultado de independencia lineal, que observamos en los ejemplos tratados

Proposición Sea V un K-e.v, sea $f \in End_K(V)$ y sean $\lambda_1, .., \lambda_r \in K$ autovalores distintos de f. Sean v_1 un autovector asociado a λ_1, ..., v_r un autovector asociado a λ_r. Entonces $\{v_1, .., v_r\}$ es un conjunto linealmente independiente en V

Demostración

- Es fácil verlo para 2 autovectores v, w con autovalores $\neq \lambda, \mu$:
Si fuera $w = kv$, ent. $\mu w = f(w) = f(kv) = k\lambda v = \lambda w$ $\emptyset$ pues $w \neq 0$
Pero eso no se puede extender así a más de 2 vectores. También se puede hacer:
Sup $kv + k'w = 0$. Aplicando $\mu Id - f$ a la expresión
queda $(\mu Id - f)\underbrace{(kv)}_{\in Nu(\lambda Id - f)} + (\mu Id - f)\underbrace{(k'w)}_{\in Nu(\mu Id - f)} = 0$

$\Rightarrow 0 = \mu(kv) - \lambda(kv) = (\mu-\lambda)(kv) \underset{\mu\neq\lambda}{\Longrightarrow} kv = 0 \underset{v\neq 0 \text{ pues autovector}}{\Longrightarrow} k = 0$

luego $k'w = 0 \underset{w \neq 0}{\Longrightarrow} k' = 0$. Y por lo tanto v y w son li.

- Para + de 2, se puede hacer por inducción en r:

Sea $k_1 v_1 + .. + k_r v_r = 0$. Qpq $k_1 = .. = k_r = 0$
Aplicando $\lambda_r Id - f$ a la expresión queda, dado que $k_r v_r \in Nu(\lambda_r Id - f)$

y que $(\lambda_r Id - f)(k_i v_i) = (\lambda_r - \lambda_i) k_i v_i$ para $1 \leq i \leq r-1$,

queda: $(\lambda_r - \lambda_1) k_1 v_1 + \dots + (\lambda_r - \lambda_{r-1}) k_{r-1} v_{r-1} = 0$

por HI, $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$ es un cjto li, y por lo tanto

$(\lambda_r - \lambda_1) k_1 = \dots = (\lambda_r - \lambda_{r-1}) k_{r-1} = 0$

Luego, como $\lambda_r \neq \lambda_i$, $1 \leq i \leq r-1$, se concluye $k_1 = \dots = k_{r-1} = 0$

Volviendo a la expresión inicial, se tiene $k_r v_r = 0 \underset{v_r \neq 0}{\Longrightarrow} k_r = 0$ $\boxtimes$

Corolario Sea V un K-e.v, $f \in End_K(V)$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ autovalores distintos de f. Sean

$\mathcal{B}_1 = \{v_{11}, \dots, v_{1s_1}\}$ base de $Nu(\lambda_1 Id - f)$, ...

..., $\mathcal{B}_r = \{v_{r1}, \dots, v_{rs_r}\}$ base de $Nu(\lambda_r Id - f)$.

Entonces $\{v_{11}, \dots, v_{1s_1}, \dots, v_{r1}, \dots, v_{rs_r}\}$ es un cjto li

Demostración:

$$\underbrace{k_{11} v_{11} + \dots + k_{1s_1} v_{1s_1}}_{v_1 \in Nu(\lambda_1 Id - f)} + \dots + \underbrace{k_{r1} v_{r1} + \dots + k_{rs_r} v_{rs_r}}_{v_r \in Nu(\lambda_r Id - f)} = 0 \Longrightarrow$$

$v_1 + \dots + v_r = 0$ ¿? Pero por la proposición anterior son li si no nulos, luego la suma (que es una c.l con coeficientes no nulos) igual a $0_V \Rightarrow$

$v_1 = \dots = v_r = 0$, o sea $k_{11} v_{11} + \dots + k_{1s_1} v_{1s_1} = 0 \Rightarrow k_{11} = \dots = k_{1s_1} = 0$

por ser $\{v_{11}, \dots, v_{1s_1}\}$ li por base, ..., $k_{r1} v_{r1} + \dots + k_{rs_r} v_{rs_r} = 0 \Rightarrow$

$k_{r1} = \dots = k_{rs_r} = 0$ también $\boxtimes$

Esto implica

Teorema (Criterio de diagonalización)

Sea V un K-e.v. de dim. finita n y sea $f \in End_K(V)$. Entonces

f se diagonaliza sobre $K \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ (distintos) tq

$\chi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ y $\dim(Nu(\lambda_i Id - f)) = m_i$, $1 \leq i \leq r$.

Demostración

$(\Longrightarrow)$ Sea $\mathcal{B}$ base de V tq $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 Id & & \\ & \lambda_2 Id & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_r Id \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow m_1 \\ \updownarrow m_2 \\ \\ \updownarrow m_r \end{matrix}$

Entonces $\chi_f = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$

y $\dim_K(Nu(\lambda_i Id - f)) = m_i$, $1 \leq i \leq r$ (completar detalles)

($\Leftarrow$) Sean $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ bases de $Nu(\lambda_1 Id - f), \dots, Nu(\lambda_r Id - f)$ con $\# \mathcal{B}_i = m_i$, que cumple $m_1 + \dots + m_r = n$.

Por la proposición anterior, juntando los vectores da n vectores l.i en V, por lo tanto una base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ de V.

Se tiene que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1 Id} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 Id} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_r Id} \end{bmatrix}$$

y por lo tanto f es diagonalizable

Observación Obviamente vale el mismo resultado para $A \in K^{n \times n}$:

A es diagonalizable sobre $K \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \in K[\lambda]$ (con $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ distintos) y $\dim(N(\lambda_i Id_n - A)) = m_i$, $1 \leq i \leq r$.

Corolario Sea V un K-e.v. de dimensión finita y sea $f \in End_K(V)$.

Supongamos que $\chi_f(\lambda)$ se factoriza linealmente en $K[X]$ con raíces simples, i.e $\chi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$ con $\lambda_i \in K, \forall i$, y $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$

Entonces f es diagonalizable sobre K

(pues $\underbrace{1 \leq}_{\text{por ser } \lambda_i \text{ autovalor}} \dim Nu(\lambda_i Id - f) \leq 1 = m_i$)

Potencias de matrices (diagonalizables)

(0) Si $A \sim B$ entonces $A^k \sim B^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, y con la misma matriz de paso!

$B = P^{-1} A P \Rightarrow B^2 = P^{-1} A P P^{-1} A P = P^{-1} A^2 P$

y sigue por inducción en k: $B^k = P^{-1} A^k P$, $\forall k \in \mathbb{N}$

(1) Sea $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ una matriz diagonal

Entonces, $\forall k \in \mathbb{N}$, se tiene $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

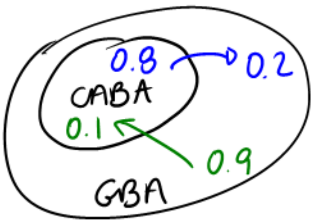
2. Sea $A \in K^{n \times n}$ diagonalizable y sea $P \in GL(n, K)$ tq $D = P^{-1} A P$ es diagonal. Entonces $D^k = P A^k P^{-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (o equivalentemente $A^k = P D^k P^{-1}$ ← permite calcular A^k)
(pero además, $\forall k$, A^k se diagonaliza con la misma matriz de cambio que A)

3. A nivel de $f \in End_K(V)$, con $\dim(V) < \infty$, esto dice que si f se diagonaliza en la base $\mathcal{B}$, entonces $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k}$ se diagonaliza también en la base $\mathcal{B}$.

Ejemplos

1. Calcular $\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}}_{A}^{100}$. Se tiene $A = P D P^{-1}$ para $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Así $A^{100} = P D^{100} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^{100} & -1+2^{100} \\ 2-2^{101} & -1+2^{101} \end{pmatrix}$

2. 

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.8\, x_k + 0.1\, y_k \\ y_{k+1} = 0.2\, x_k + 0.9\, y_k \end{cases}$$

(Ejemplo de Proceso de Markov)
Andrei Markov, 1856-1922

$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$

$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.7)$

$N(1. Id - A) = \langle (1, 2) \rangle$

$N(0.7\, Id - A) = \langle (-1, 1) \rangle$

$D = P^{-1} A P$ con $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

¿Qué pasará al cabo de ∞ años?

$D^k \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $k \to \infty \Rightarrow A^k \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Esto significa que no importa con qué poblaciones iniciales en CABA y GBA con las que se empezó, si $x_0 + y_0 = N$, la tendencia al cabo de "muchos" años es que $\begin{pmatrix} x^\infty \\ y^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3\, N \\ 2/3\, N \end{pmatrix}$

Es decir habrá $1/3$ de la población total N en CABA y $2/3$ en GBA (estado de equilibrio)

Más ejemplos

① **Sucesión de Fibonacci**: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Se tiene $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

y por lo tanto $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Queremos la fórmula cerrada para F_n. $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \phi)(\lambda - \overline{\phi})$

donde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el número de oro y $\overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Luego A es diagonalizable: $D = P^{-1}AP \Rightarrow A^n = P D^n P^{-1}$

Haciendo las cuentas queda

$N(\phi\, Id_2 - A) = \langle(\phi, 1)\rangle$ y $N(\overline{\Phi}\, Id - A) = \langle(\overline{\Phi}, 1)\rangle$

Luego $D = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} \phi & \overline{\Phi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si $A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, nosotros buscamos F_n en $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

o sea buscamos c.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi & \overline{\Phi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \overline{\Phi}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi & \overline{\Phi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ \phi^n & \overline{\Phi}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & * \\ -1 & * \end{pmatrix}\frac{1}{\underbrace{\phi - \overline{\Phi}}_{=\sqrt{5}}}$$

$$\Rightarrow \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \overline{\Phi}^n\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

② **Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales**

La ecuación diferencial $x'(t) = \lambda x(t)$ tiene como solución

$x(t) = e^{\lambda t} c = e^{\lambda t} x(0)$ donde $x(0)$ es la "condición inicial"

a) Si $\overline{X}'(t) = D\overline{X}(t)$ es un sistema diagonal, con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\overline{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ y $\overline{X}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$, con condición inicial $\overline{X}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$

el sistema es en realidad: $x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t)$ con condición inicial $x_1(0)$, ...

..., $x_n'(t) = \lambda_n x_n(t)$ con condición inicial $x_n(0)$

o sea $x_1(t) = e^{\lambda_1 t} x_1(0), \ldots, x_n(t) = e^{\lambda_n t} x_n(0)$

que se resume en $\overline{X}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{e^{Dt}} \overline{X}(0)$

Sea $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ una matriz diagonal, entonces $e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$:

Justificación

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \qquad \text{(desarrollo de Taylor)}$$

Proponemos

$$e^D = Id_n + D + \frac{D^2}{2} + \cdots + \frac{D^k}{k!} + \cdots$$

$$= Id_n + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1^2/2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2/2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \lambda_1^k/k! & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k/k! \end{pmatrix} +$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \cdots + \frac{\lambda_1^k}{k!} + \cdots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \lambda_n + \cdots + \frac{\lambda_n^k}{k!} + \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Veremos más adelante que esa definición es compatible con las propiedades que nos interesa preservar de la exponencial. En particular

$$e^D . e^{D'} = e^{D+D'} \quad (\text{pues } DD' = D'D) \quad y \quad e^0 = Id_n$$

Luego para D diagonal, la solución del sistema $X'(t) = D X(t)$ con condición inicial $X(0)$ es $X(t) = e^{Dt} X(0)$

b) Sea ahora el sistema lineal $X'(t) = A X(t)$ con $A = PDP^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizable, con condición inicial $X(0)$.

Sea el cambio de variables $\underline{Y}(t) = P^{-1} \underline{X}(t)$, ent como este cambio es lineal, se tiene $\underline{Y}'(t) = P^{-1} \underline{X}'(t)$. Por lo tanto

$$\underline{X}'(t) = PDP^{-1}\underline{X}(t) \Leftrightarrow P^{-1}\underline{X}'(t) = DP^{-1}\underline{X}(t) \Leftrightarrow \underline{Y}'(t) = D\underline{Y}(t) \Leftrightarrow$$

$$\underline{Y}(t) = e^{Dt}\underline{Y}(0) \Leftrightarrow \underline{X}(t) = P\underline{Y}(t) = P.e^{Dt}.\underline{Y}(0) = \underbrace{P.e^{Dt}\ P^{-1}}_{e^{At}}\underline{X}(0)$$

Justificación

Si $A = PDP^{-1}$, siguiendo el mismo espíritu

$$e^{At} = Id_n + At + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots = Id_n + PDtP^{-1} + \cdots + P\frac{(Dt)^k}{k!}P^{-1} + \cdots$$

$$= P\left(Id_n + Dt + \cdots + \frac{(Dt)^k}{k!} + \cdots\right)P^{-1} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

Si $A = PDP^{-1}$ con D diagonal, entonces $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$

Conclusión: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizable. Entonces la solución del sistema diferencial $X'(t) = A X(t)$ con condición inicial $X(0)$ es $X(t) = e^{At} X(0)$.