El espacio dual

Definición: Sea V un K-e. vectorial, entonces se llama espacio dual de V a $V^* := Hom_K(V,K) = \{\varphi : V \to K : \varphi \text{ t.l.}\}$ ← funcionales lineales

Ejemplos:

1. Dados $(a_1,\dots,a_n) \in K$: $\varphi_a : K^n \to K : \varphi_a(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ $\in (K^n)^*$. Se llama forma lineal. De hecho todo φ en $(K^n)^*$ es igual a φ_a para algún $a = (a_1,\dots,a_n) \in K^n$ (hiperplanos en $K^n\dots$)
2. $tr : K^{n\times n} \to K : A \mapsto tr(A) \in (K^{n\times n})^*$ ← traza
3. $\mathcal{E}_\alpha : K[X] \to K : P \mapsto P(\alpha) \in K[X]^*$ ← evaluación en α
4. $\int_a^b : C([a,b]) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt \in C([a,b])^*$ ← integral definida

Observación:

- Vimos que V^* es un K-e.v, con las operaciones $(\phi + \psi)(v) := \phi(v) + \psi(v)$, $\forall v \in V$ y $(k\phi)(v) = k\cdot\phi(v)$, $\forall k \in K, v \in V$
- Es más, vimos que si $\dim_K(V) = n$ (finita), entonces

$$V^* \cong K^{1\times n} \quad \text{y satisface} \quad \dim_K(V^*) = n$$

vía el isomorfismo, por ejemplo fijado $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ base de V y $\mathcal{B}' = (1)$ base de K:

$$V^* \xrightarrow{\phi_{\mathcal{B}}} K^n$$
$$\varphi \longmapsto [\varphi]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [\varphi(v_1)\ \varphi(v_2)\ \dots\ \varphi(v_n)]$$

- Al ser isomorfismo, manda base a base (y ϕ^{-1} también!):

$(E^{11},\dots,E^{1n})$ base canónica de $K^{1\times n} \Rightarrow (\underbrace{\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(E^{11})}_{\varphi_1},\dots,\underbrace{\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(E^{1n})}_{\varphi_n})$ base de V^*. ¿Cuál es?

$$\phi_{\mathcal{B}}(\varphi_i) = E^{1i} \iff [\varphi_i]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = E^{1i} \iff \varphi_i(v_i) = 1 \text{ y}$$

$\varphi_i(v_j) = 0$ para $j \neq i$ (o sea $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$): φ_i es el (único) funcional lineal que satisface esas condiciones sobre $\mathcal{B}$, $1 \le i \le n$.

Base dual

Teorema (base dual)

Sea V un K-e.v de dim n, y sea $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$ una base de V.
Entonces existe una única base $\mathcal{B}^* = (v_1^*, .., v_n^*)$ de V^* que satisface $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (i.e. $v_i^*(v_i) = 1$ y $v_i^*(v_j) = 0$ para $j \neq i$) para todo $1 \leq i, j \leq n$. Se tiene:

Ojo que v_i^* no depende solo de v_i sino de todos los v_j, $1 \leq j \leq n$

1. Para todo $v \in V$, $v = v_1^*(v)\, v_1 + \dots + v_n^*(v)$
2. Para todo $\varphi \in V^*$, $\varphi = \varphi(v_1)\, v_1^* + \dots + \varphi(v_n)\, v_n^*$

i.e $[v]_{\mathcal{B}} = (v_1^*(v), \dots, v_n^*(v))$

$[\varphi]_{\mathcal{B}^*} = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$

Demostración

Ya vimos que existe la base dual $\mathcal{B}^* = (v_1^*, .., v_n^*)$ por la construcción anterior: $v_i^* = \varphi_i$ de antes.
Cada v_i^* es único pues está definido sobre la base $\mathcal{B}$.
Sea $v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$ en V,
entonces $v_i^*(v) = k_1 v_i^*(v_1) + \dots + k_n v_i^*(v_n) = k_i$, $\forall i$
Análogamente, sea $\varphi = k_1 v_1^* + \dots + k_n v_n^*$ en V^*, entonces
$\varphi(v_j) = k_1 v_1^*(v_j) + \dots + k_n v_n^*(v_j) = k_j$, $\forall j$. ⊠

Ejemplos:

1. Si $\mathcal{E} = (e_1, .., e_n)$ es la base canónica de K^n, entonces la base dual $\mathcal{E}^* = (e_1^*, .., e_n^*)$ de $(K^n)^*$ son las funciones coordenadas $x_i : K^n \to K$ pues $x_i(e_j) = 1$ si $j = i$ y 0 si no.
Y cada $\varphi \in (K^n)^*$ se escribe como $\varphi = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ define un hiperplano en K^n
(donde observamos que $\varphi(e_j) = a_j$, $\forall j$
De la misma forma $x_i(v) =$ i-ésima coordenada de V.

Los funcionales lineales generalizan esa noción de hiperplano a espacios vectoriales abstractos

(2) Sea $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Entonces $\mathcal{B}^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ con $v_1^* = x_3$ (3)
$v_2^* = x_2 - x_3$ y $v_3^* = x_1 - x_2$. Pues $v_i^* = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ satisface:

$$\begin{cases} v_1^*(v_1) = 1 \\ v_1^*(v_2) = 0 \\ v_1^*(v_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1 \Rightarrow v_1^* = x_3$$

$$\begin{cases} v_2^*(v_1) = 0 \\ v_2^*(v_2) = 1 \\ v_2^*(v_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1 \Rightarrow v_2^* = x_2 - x_3$$

etc.

(3) En $K_n[x]$, si $\mathcal{B} = (1, x-\alpha, \dots, (x-\alpha)^n)$, entonces $\mathcal{B}^* = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ con
$\varphi_0(P) = P(\alpha)$, $\varphi_1(P) = P'(\alpha)$, $\varphi_2(P) = \frac{P''(\alpha)}{2}$, $\dots$, $\varphi_n(P) = \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}$ ¿por qué, quiénes son?
(Brook Taylor, 1685-1731)

Comentario: Si V es de dim. infinita y $\mathcal{B}$ es base de V, se puede definir, para cada $v \in \mathcal{B}$, el funcional lineal $v^* \in V^*$ que satisface $v^*(v) = 1$ y $v^*(v') = 0$, $\forall v' \neq v$ en $\mathcal{B}$. Se tiene que $\{v^*, v \in \mathcal{B}\}$ es un conjunto l.i pero en general no es base de V^*...

Proposición: (Cambio de base)

Sea V un K-e.v de dim n y sean $\mathcal{B}, \mathcal{E}$ bases de V, con bases duales $\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*$. Entonces $C(\mathcal{E}^*, \mathcal{B}^*) = C(\mathcal{B}, \mathcal{E})^t$.

Demostración: Sean $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ y $\mathcal{E} = (w_1, \dots, w_n)$. Entonces

$$C(\mathcal{E}^*, \mathcal{B}^*) = \left[[w_1^*]_{\mathcal{B}^*} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [w_n^*]_{\mathcal{B}^*} \right] = \begin{bmatrix} w_1^*(v_1) & \cdots & w_n^*(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^*(v_n) & \cdots & w_n^*(v_n) \end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$C(\mathcal{B}, \mathcal{E})^t = \left[[v_1]_{\mathcal{E}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [v_n]_{\mathcal{E}} \right]^t = \begin{bmatrix} w_1^*(v_1) & \cdots & w_1^*(v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^*(v_1) & \cdots & w_n^*(v_n) \end{bmatrix}^t$$

Consecuencia (Existencia de base para dual dada)

Sea V un K-e.v de dim finita n, y sea $\mathcal{B}'$ base de V^*. Entonces existe $\mathcal{B}$ base de V tq $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$, y es única.

Demostración: Usando el cambio de base, si tenemos $\mathcal{B}'$ base de V^* y queremos que sea igual a $\mathcal{B}^*$ para alguna base $\mathcal{B}$ de V, obliguémoslo imponiendo $C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*) = C(\mathcal{B}', \mathcal{E}^*)$ para alguna $\mathcal{E}^*$ conocida (en ese caso claramente $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$ pues tendrán las mismas coordenadas en la base $\mathcal{E}^*$).
¿Quién tendrá que ser $\mathcal{B}$ entonces? Tenemos $C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*) = C(\mathcal{E}, \mathcal{B})^t$, luego tendrá que ser $\mathcal{B}$ la base de V que se obtiene imponiendo
$C(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = C(\mathcal{B}', \mathcal{E}^*)^t$ (es decir $C(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = [C(\mathcal{B}', \mathcal{E}^*)^t]^{-1}$).
Reconstruyemos: Sea $\mathcal{E}$ base de V y sea $\mathcal{E}^*$ su base dual. Entonces
$C(\mathcal{B}^*, \mathcal{E}^*) = C(\mathcal{E}, \mathcal{B})^t = C(\mathcal{B}', \mathcal{E}^*) \Rightarrow \mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$.

Sea $\mathcal{C}$ otra base tq $\mathcal{C}^* = \mathcal{B}' = \mathcal{B}^*$. Pongamos $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$, y
$\mathcal{C} = (w_1, .., w_n)$, entonces $[w_i]_{\mathcal{B}} = (v_1^*(w_i), \dots, v_n^*(w_i))$
$= (w_1^*(w_i), .., w_n^*(w_i)) = e_i = [v_i]_{\mathcal{B}} \Rightarrow w_i = v_i$. ☒

Ejemplo importante (Interpolación de Lagrange, Joseph-Louis de Lagrange, 1736-1813)

El ejemplo anterior prueba que:

Dado $\alpha \in K$ y $\beta_0, .., \beta_n \in K$, existe un único $P \in K_n[X]$ tq
$P(\alpha) = \beta_0$, $P'(\alpha) = \beta_1$, .., $P^{(n)}(\alpha) = \beta_n$ ¿Por qué? ¿quién es?

Estamos fijando aquí las $n+1$ condiciones dadas por los valores que toma un polinomio P de grado $\leq n$ y sus derivadas hasta orden n en un punto α dado.

También se pueden fijar $n+1$ condiciones dando los valores que debe tomar el polinomio en $n+1$ puntos $\alpha_0, .., \alpha_n$ distintos:

Dados $\alpha_0, .., \alpha_n \in K$ distintos y $\beta_0, .., \beta_n \in K$, existe un único $P \in K_n[X]$ tq $P(\alpha_0) = \beta_0, .., P(\alpha_n) = \beta_n$. Hallando la base $(P_0, .., P_n)$ de $K_n[X]$ dual de $(\mathcal{E}_{\alpha_0}, .., \mathcal{E}_{\alpha_n})$ donde $\mathcal{E}_{\alpha_i} : K_n[X] \to K : \mathcal{E}_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$. (Ej. 13 Práctica)

Existe también la generalización mixta: interpolación de Hermite (Charles Hermite, 1822-1901) dando $n+1$ condiciones para polinomios y sus derivadas en puntos $\neq$:

Dados $\alpha_0, .., \alpha_r \in K$ distintos y $\beta_{00}, .., \beta_{0m_0}, .., \beta_{r0}, .., \beta_{rm_r}$ $n+1$ ptos en K, existe un único $P \in K_n[X]$ tq
$P(\alpha_0) = \beta_{00}, .., P^{(m_0)}(\alpha_0) = \beta_{0m_0}, \dots, P(\alpha_r) = \beta_{r0}, .., P^{(m_r)}(\alpha_r) = \beta_{rm_r}$.

¿PENSARLO?

El anulador

Habíamos visto que el cjto de soluciones de un sistema de m ecuaciones lineales homogéneo en n incógnitas con coeficientes en K es un subespacio de K^n. Cada ecuación $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$ representa el núcleo de una forma lineal $\varphi_a: K^n \to K$, $\varphi_a(x)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$, que si $a\neq 0$, determina un subespacio de dim $(n-1)$, un hiperplano, de K^n.

Recíprocamente podemos en K^n considerar el subespacio $H=\langle v_1,\dots,v_{n-1}\rangle$ con $\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$ li, hiperplano, y preguntarnos quiénes son todas las formas lineales $\varphi\in(K^n)^*$ que se anulan en H: Veremos que son todas múltiplo de una sola. Luego hiperplanos en K^n $\longleftrightarrow$ formas lineales no nulas...

Definición (Anulador)

Sea V un K-e.v y sea S un subespacio de V. El **anulador** de S es el conjunto $S^\circ=\{\varphi\in V^*: \varphi(s)=0, \forall s\in S\}$

Si $S=\langle v_1,\dots,v_s\rangle$, entonces $\varphi\in S^\circ \iff \varphi(v_1)=\dots=\varphi(v_s)=0$.

Observación: S° es un subespacio de V^*:

pues $0_{V^*}\in S^\circ$, $\varphi,\psi\in S^\circ \Rightarrow \varphi(s)=0, \psi(s)=0, \forall s\in S$, y luego $(\varphi+\psi)(s)=0$, $\forall s\in S$, o sea $\varphi+\psi\in S^\circ$, y también $\varphi\in S^\circ, k\in K \Rightarrow k\varphi\in S^\circ$ (hacerlo).

Ejemplo: Sea $H=\langle \underbrace{(1,1,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,1,0,0)}_{v_2}, \underbrace{(1,0,1,0)}_{v_3}\rangle \leq K^4$ $\leftarrow$ dim 3

$$H^\circ=\{\varphi=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4 : \varphi(v_1)=\varphi(v_2)=\varphi(v_3)=0\}$$
$$=\langle x_1-x_2-x_3+x_4\rangle \quad \leftarrow \text{dim } 1$$

pues $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=0\\ a_1+a_2=0\\ a_1+a_3=0\end{cases} \iff \begin{cases} a_2=-a_1\\ a_3=-a_1\\ a_4=a_1\end{cases} \iff \varphi=a_1(x_1-x_2-x_3+x_4)$

Cuando V tiene dimensión finita, el isomorfismo entre V y V^* determina la dimensión de S° en función de la dimensión de S:

Proposición: Sea V un K-e.v de dim finita, y sea S un subespacio de V.

Entonces $\dim_K(S^0) = \dim_K(V) - \dim_K(S)$

Demostración:

$$V \xrightarrow{(n)} V^*$$

$$\mathcal{B} = (\underbrace{v_1, \dots, v_s}_{\text{base de } S}, \underbrace{v_{s+1}, \dots, v_n}_{\substack{\text{completada} \\ \text{a base de } V}}) \longmapsto \mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_s^*, v_{s+1}^*, \dots, v_n^*)$$

Afirmación: $\{v_{s+1}^*, \dots, v_n^*\}$ es base de S^0:

- Pertenecen a S^0 pues $\left.\begin{cases} v_{s+1}^*(v_j) = 0, & 1 \le j \le s \\ v_n^*(v_j) = 0, & 1 \le j \le s \end{cases}\right\}$ se anulan en todo S

- Son l.i pues están en $\mathcal{B}^*$

- Generan S^0: $\forall \varphi \in V^*$, $\varphi = \varphi(v_1) v_1^* + \dots + \varphi(v_n) v_n^*$

  $\varphi \in S^0 \iff \varphi(v_1) = 0, \dots, \varphi(v_s) = 0 \implies \varphi = \varphi(v_{s+1}) v_{s+1}^* + \dots + \varphi(v_n) v_n^*$

  o sea $\varphi \in \langle v_{s+1}^*, \dots, v_n^* \rangle$. $\boxtimes$

Esta demostración da un método para calcular el anulador, vía bases duales, pero también nos dice cómo hacer para encontrar el anulador "a ojo", cuántas ecuaciones tengo que encontrar:

Ejemplo Sea $S = \langle (1,0,1,0), (0,1,1,1) \rangle \le K^4$

Entonces $S^0 = \langle x_1 - x_3 + x_4, \; x_2 - x_4 \rangle$ por ejemplo, pues sabemos que $\dim(S^0) = 4 - 2 = 2$ y estas son 2 ecuaciones l.i que se anulan en S.