

Matrices equivalentes

Proposición: Sea $f: V^{(n)} \rightarrow W^{(m)}$ con $\dim(\text{Im}(f)) = r$.

Entonces existen $\mathcal{B}$ base de V y $\mathcal{B}'$ base de W tq

$$[f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{array}{|cc|} \hline \text{Id}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow r \\ \downarrow m-r \\ \leftarrow r \rightarrow \leftarrow m-r \rightarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se observa que si } \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \text{ y} \\ \mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m), \text{ se tiene} \\ \text{Nu}(f) = \{v_{r+1}, \dots, v_n\} \text{ e } \text{Im}(f) = \{w_1, \dots, w_r\} \end{array} \right)$$

Demostración

Si $\{w_1, \dots, w_r\}$ es base de $\text{Im}(f)$ y $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es base de $\text{Nu}(f)$, sabemos por la demostración del teorema de la dimensión que eligiendo $v_1, \dots, v_r \in V / f(v_i) = w_i$, obtenemos que $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ es base de V . Luego completando $(w_1, \dots, w_r)$ a una base de W con $(w_{r+1}, \dots, w_m)$, se cumple $f(v_j) = w_j, 1 \leq j \leq r, \Rightarrow [f(v_j)]_{\mathcal{B}'} = e_j, 1 \leq j \leq r$ y $f(v_j) = 0, r+1 \leq j \leq n \Rightarrow [f(v_j)]_{\mathcal{B}'} = 0, r+1 \leq j \leq n$.

Luego $[f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es como se pide. $\square$

Definición (Matrices equivalentes)

Sean $A, B \in K^{m \times n}$. Se dice que B es **equivalente** a A cuando existen $Q \in GL(m, K)$ y $P \in GL(n, K)$ tq $B = QAP$

$$B \equiv A \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists P, Q \text{ invertibles: } B = QAP$$

Observación: $\equiv$ es una relación de equivalencia (R, S, T)

Otra: $B \equiv A \Rightarrow \text{rg}(B) = \text{rg}(A)$.

Proposición: (Matrices equivalentes y t.l. en 2 juegos de bases)

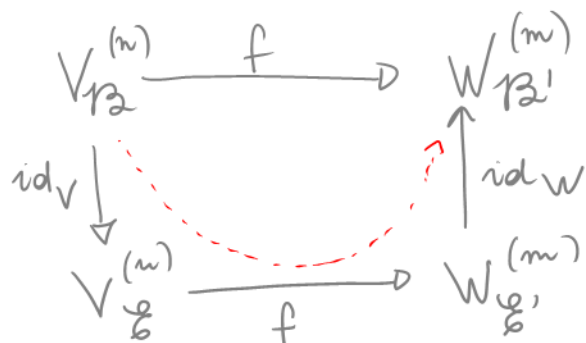
Sean $A, B \in K^{m \times n}$. Entonces $B \equiv A$ si y solo si representan la

misma t.l. $f: V^{(n)} \rightarrow W^{(m)}$ en 2 juegos de base; es decir, $\forall V, W$ K -e.v de dim n y m resp, y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V y W , $\exists f: V \rightarrow W$ t.l.

y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V y W tq $A = [f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ y $B = [f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

Demostración

(2)



$$(\Leftrightarrow) f = id_W \circ f \circ id_V \Rightarrow [f]_{B B'} = [id_W]_{\mathcal{B}' B'} [f]_{\mathcal{B} \mathcal{B}'} [id_V]_{B \mathcal{B}}$$

$\parallel$ invertible $\parallel$ invertible
 $B = Q \quad A \quad P$

($\Rightarrow$) Dados $V_{\mathcal{B}}^{(n)}$ y $W_{\mathcal{B}'}^{(m)}$, sea $f: V \rightarrow W$ definida por $[f]_{\mathcal{B} \mathcal{B}'} = A$.

Si $B = Q A P$, entonces Q y P son matrices de cambio de base por ser invertibles: $\exists B$ base de V : $P = C(B, \mathcal{B})$ y B' base de W : $Q = C(\mathcal{B}', B')$ luego $B = C(\mathcal{B}', B') \cdot [f]_{\mathcal{B} \mathcal{B}'} \cdot C(B, \mathcal{B}) = [f]_{B B'}$. $\square$

Teorema: $A \equiv B \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$

Dem: pues si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = s$, ambas son equivalentes a

$$\begin{array}{c|c} \leftarrow s \rightarrow & \\ \hline \text{Id}_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

Proyectores

Notación para endomorfismos:

Sea $f \in \text{End}_K(V)$ donde V es un e.v. de dim n , y sea B base de V . En lugar de escribir $[f]_{B B}$ escribiremos $[f]_B$

$$V_B^{(n)} \xrightarrow{f} V_B^{(n)}$$

$B = (v_1, \dots, v_n)$

$$[f]_B = \begin{bmatrix} [f(v_1)]_B & \dots & [f(v_n)]_B \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$$

Ejemplos: ① Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
 $\exists B$ base de $\mathbb{R}^3$ tq $[f]_B = \text{Id}_3$? **No** pues $[f]_B = \text{Id}_3 \Rightarrow f = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.

② Sea ahora $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\exists B$ base de $\mathbb{R}^3$ tq $[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

Acá no slo tienen que coincidir los rangos: la exigencia $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = 0$ es muy fuerte!

$$\text{Nu}(f) = \langle (1,1,0) \rangle \text{ e } \text{Im}(f) = \langle (1,2,0), (0,0,2) \rangle \\ = \langle v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Necesitaríamos $v_1, v_2 \in \langle (1,2,0), (0,0,2) \rangle$ tq $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$

$$\text{Sea } v = \alpha v_1 + \beta v_2, \text{ entonces } f(v) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) \\ = \alpha (1,2,0) + \beta (0,0,4) \\ = (\alpha, 2\alpha, 4\beta)$$

$$f(v) = v \Leftrightarrow \beta = 0 \Rightarrow v = \alpha v_1:$$

no podemos encontrar 2 vectores li tq $f(v_1) = v_1$ y $f(v_2) = v_2$.

No hay entonces.

③ Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿ $\exists B$ / $[f]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

$$\text{Nu}(f) = \langle (1,1,0) \rangle = \langle v_3 \rangle$$

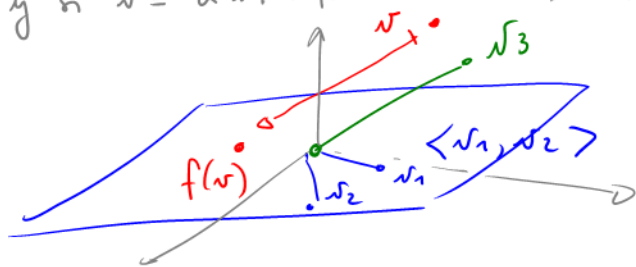
$$\text{Im}(f) = \langle (1,2,0), (1,1,1) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Aquí $f(1,2,0) = (1,2,0)$ y $f(1,1,1) = (1,1,1)$ cumplen,
luego podemos tomar $B = ((1,2,0), (1,1,1), (1,1,0))$

que son automáticamente base de $\mathbb{R}^3$ ¿por qué?

Observamos que $\forall v \in \langle (1,2,0), (1,1,1) \rangle$, se tiene $f(v) = v$.

y si $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, $f(v) = \alpha v_1 + \beta v_2$:



f proyecta v al plano $\langle v_1, v_2 \rangle$

siguiendo la dirección de v_3

Vale aquí $[f]_B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ con $P = [v_1 | v_2 | v_3]$ ¿Por qué?

Observar que se cumple que $f \circ f(v) = f(\underbrace{f(v)}_{\in \langle v_1, v_2 \rangle}) = f(v)$, $\forall v$

Definición (proyector)

Sea V un K -e.v. y sea $f \in \text{End}_K(V)$. f se llama un **proyector** si se satisface que $f \circ f = f$.

Proposición: Sea f un K -e.v. y sea $f \in \text{End}_K(V)$. Entonces

① f es proyector $\Leftrightarrow f(w) = w$, $\forall w \in \text{Im}(f)$

② f es proyector $\Rightarrow V = \text{Im}(f) \oplus \text{Nu}(f)$

Demostación

④

① ($\Rightarrow$) Sea $w \in \text{Im}(f)$, entonces $w = f(v)$ para algún $v \in V$
 $\Rightarrow f(w) = f(f(v)) = f \circ f(v) \stackrel{f \text{ proyector}}{=} f(v) = w \checkmark$

($\Leftarrow$) Sup $f(w) = w, \forall w \in \text{Im}(f)$; entonces

$\forall v \in V: f \circ f(v) = f(\underbrace{f(v)}_{\in \text{Im}(f)}) = f(v)$: luego $f \circ f = f$.

② Qp q $V = \text{Im}(f) + \text{Nu}(f)$ y que $\text{Im}(f) \cap \text{Nu}(f) = \{0\}$

• Sea $v \in V$, entonces $f(v) \in \text{Im}(f)$. Seanos si vale que $v - f(v) \in \text{Nu}(f)$ (candidato natural si pesa lo del ejemplo)

$$f(v - f(v)) \stackrel{f \text{ tl}}{=} f(v) - f(f(v)) \stackrel{f \text{ proy.}}{=} f(v) - f(v) = 0$$

$$\text{Así } v = \underbrace{f(v)}_{\in \text{Im}(f)} + \underbrace{(v - f(v))}_{\in \text{Nu}(f)} \Rightarrow V = \text{Im}(f) + \text{Nu}(f)$$

• Sea $w \in \text{Im}(f) \cap \text{Nu}(f)$. Entonces $w = f(v)$ por ser $w \in \text{Im}(f)$ y como $w \in \text{Nu}(f)$: $0 = f(w) = f(f(v)) = f \circ f(v) = f(v) = w \Rightarrow w = 0$
 $\Rightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Nu}(f) = \{0\}$.

¿Vale que si $V = \text{Im}(f) \oplus \text{Nu}(f)$, entonces f es proyector?

Proposición: Sea V un K -e.v. de dimensión finita n ; y sea $f \in \text{End}_K(V)$. Entonces

f es proyector $\Leftrightarrow \exists$ B base de V : $[f]_B = \left[\begin{array}{c|c} \text{Id}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{array}$

Demostación

($\Rightarrow$) Se tiene $V \stackrel{(w)}{=} \text{Im}(f) \stackrel{(r)}{\oplus} \text{Nu}(f) \stackrel{(s)}{}$ y $f(w) = w, \forall w \in \text{Im}(f)$

Luego sea $B = \{ \underbrace{w_1, \dots, w_r}_{\text{base de Im}(f)}, \underbrace{u_1, \dots, u_s}_{\text{base de Nu}(f)} \}$: $[f]_B$ cumple! ∇

($\Leftarrow$) Observemos que en ese caso, si $B = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ se tiene que $\text{Im}(f) = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ y $\text{Nu}(f) = \langle v_{r+1}, \dots, v_n \rangle$

Además, $\forall w \in \text{Im}(f)$, se tiene que $f(w) = w$ pues

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \Rightarrow f(w) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_r f(v_r) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = w$$



El K -e.v. $\text{Hom}_K(V, W)$:

(5)

Observación 1: Sea V un c.f.t. y W un K -e.v. Entonces

$$W^V := \{ f: V \rightarrow W : f \text{ función} \}$$

es un K -espacio vectorial (de la misma manera que antes K^X era

un K -e.v.: se usan fuertemente las propiedades de K -e.v. de W ,

por ejemplo $(k+k')f = kf + k'f$ pues $\forall v \in V$

$$\begin{aligned} ((k+k')f)(v) &= (k+k') \underbrace{f(v)}_{\substack{\in \\ W \text{ e.v.}}} = kf(v) + k'f(v) = (kf)(v) + (k'f)(v) \\ &= (kf + k'f)(v) \end{aligned}$$

Observación 2: $\text{Hom}_K(V, W)$ es un subespacio de W^V

pues $0 \in \text{Hom}_K(V, W)$ (la función nula de V en W)

• $f, g \in \text{Hom}_K(V, W) \Rightarrow f+g \in \text{Hom}_K(V, W)$: pues $\forall v, v' \in V$:

$$(f+g)(v+v') = f(v+v') + g(v+v') = f(v) + f(v') + g(v) + g(v')$$

$$(f+g)(v) + (f+g)(v') = f(v) + g(v) + f(v') + g(v')$$

$$\text{y } (f+g)(kv) = f(kv) + g(kv) = kf(v) + kg(v) = (kf)(v) + (kg)(v)$$

$$k(f+g)(v) = (kf+kg)(v)$$

• $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ y $k \in K \Rightarrow kf \in \text{Hom}_K(V, W)$:

$$(kf)(v+v') = k f(v+v') = k f(v) + k f(v') = (kf)(v) + (kf)(v')$$

$$(kf)(k'v) = k f(k'v) = k k' f(v) = k' k f(v) = k' (kf)(v) \quad \square$$

Así $\text{Hom}_K(V, W)$ es un K -espacio vectorial ∇

Observación 3: Si $\dim_K(V) = n$, $\dim_K(W) = m$ y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ son bases de V, W respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Hom}_K(V, W) &\xrightarrow{m \times n} K \\ f &\mapsto [f]_{\mathcal{B}' \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [f(v_1)]_{\mathcal{B}'} & \cdots & [f(v_n)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

es una transformación lineal ∇

pues tomar coordenadas es l.e:

$$\phi(f+g) = [f+g]_{B_2 B_1} = \left[\begin{array}{c|c} [f+g](v_1)_{B_1} & \dots & [f+g](v_n)_{B_1} \end{array} \right]$$

$$\phi(f) + \phi(g) = [f]_{B_2 B_1} + [g]_{B_2 B_1} = \left[\begin{array}{c|c} [f(v_1) + g(v_1)]_{B_1} & \dots & [f(v_n) + g(v_n)]_{B_1} \end{array} \right]$$

$\uparrow$
 $[f(v_1)]_{B_1} + [g(v_1)]_{B_1}$ etc...

Idem para $\phi(kf)$: hacerlo.

Por lo tanto, como ϕ es biyectiva.

$$\text{Hom}_K(V, W) \cong K^{m \times n}$$

y

$$\dim_K(\text{Hom}_K(V, W)) = m \cdot n$$

