MATRICES

$$K^{m\times n} = \{ A = (A_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \, , \; A_{ij} \in K \, , \; \forall i,j \}$$

= conjunto de matrices de m filas y n columnas con coeficientes en K (Aquí K es un cuerpo, e.g $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

- **Suma**:

$A, B \in K^{m\times n} \Rightarrow A+B \in K^{m\times n}$: $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

- es asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$, $\forall A,B,C \in K^{m\times n}$
- tiene un elemento neutro para la suma: la matriz nula

$$A + 0 = 0 + A = A \, , \; \forall A \in K^{m\times n}$$

(donde $0 \in K^{m\times n}$ es la matriz $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$)

- toda matriz A tiene un inverso aditivo (opuesto) que es la matriz $-A$ (donde $(-A)_{ij} = -A_{ij}$)

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

- es conmutativa: $A+B = B+A$, $\forall A, B \in K^{m\times n}$

$(K^{m\times n}, +)$ es un grupo conmutativo, o grupo abeliano

(por Niels-Henrik Abel, matemático noruego, 1802-1829)

- **Producto por escalares**:

$A \in K^{m\times n}$, $a \in K \Rightarrow aA \in K^{m\times n}$: $(aA)_{ij} = a A_{ij}$

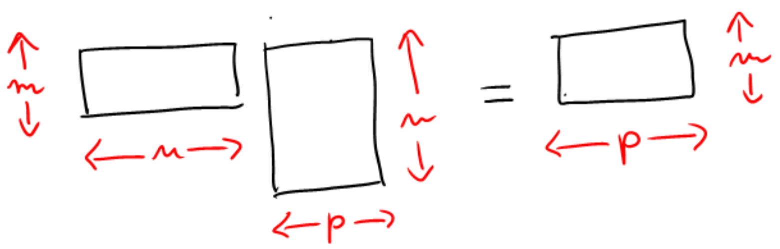
- $1 . A = A$, $\forall A \in K^{m\times n}$
- $(ab)A = a(bA)$, $\forall a,b \in K, A \in K^{m\times n}$
- $(a+b)A = aA + bA$, $\forall a,b \in K, A \in K^{m\times n}$
- $a(A+B) = aA + aB$, $\forall a \in K$, $A, B \in K^{m\times n}$

- **Producto**

$A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times p} \Rightarrow AB \in K^{m\times p}$

=

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$



– es asociativo: $(AB)C = A(BC)$, $\forall A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times p}$, $C \in K^{p\times q}$

– distributividades: $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$.

• Producto de matrices cuadradas:

$A, B \in K^{n\times n} \Longrightarrow AB \in K^{n\times n}$: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$

– es asociativo: $(AB)C = A(BC)$, $\forall A, B, C \in K^{n\times n}$

– **no** es conmutativo: $AB \neq BA$ en general

– tiene un elemento neutro para el producto:

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot Id_n = Id_n \cdot A = A, \ \forall A \in K^{n\times n}$$

– **no** toda matriz no nula tiene inversa:

> $A \in K^{n\times n}$ tiene inversa si existe $B \in K^{n\times n}$ tq
> $AB = BA = Id_n$.
> En ese caso se dice que A es invertible

– Distributividad del producto sobre la suma:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad \forall A, B, C \in K^{n\times n}$$
$$(A+B)C = AC + BC$$

$(K^{n\times n}, +, \cdot)$ es un anillo (no conmutativo)

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ Calcular A^k para $k = 2, 3, 4, \dots$

Ejemplo: $A \in K^{m \times n}$, $x \in K^{n \times 1} \Longrightarrow Ax \in K^{m \times 1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

observar:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1^{er} \text{ columna de } A$$

$$A \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} = j\text{-ésima columna de } A$$

Observaciones:

- $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$
- $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

• Matriz transpuesta

$$A \in K^{m \times n} \Longrightarrow A^t \in K^{n \times m} : \quad (A^t)_{ij} = A_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposición: Sean $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$

Entonces $(AB)^t = B^t A^t$

Definición: $A \in K^{n \times n}$ es **simétrica** si $A = A^t$

• El grupo $(GL(n, K), \cdot)$:

Proposición (unicidad de la inversa)

Sea $A \in K^{n \times n}$ inversible. Entonces hay una única inversa (que se nota A^{-1})

Demostración: Probaremos que si B y C son ambas inversas de A, es decir $AB = BA = Id_n$ y $AC = CA = Id_n$, entonces es que B y C son iguales en realidad:

$BA = Id_n \Rightarrow (BA)C = Id_n \cdot C \Rightarrow B(AC) = C$

$\Rightarrow B \cdot Id_n = C \Rightarrow B = C$ $\boxtimes$

Proposición (inversa a derecha (o izquierda) $\Rightarrow$ inversa)

Sea $A \in K^{n \times n}$ tq existe $B \in K^{n \times n}$ que satisface $AB = Id_n$. Entonces $BA = Id_n$ también. Es decir $B = A^{-1}$.

(Vale lo mismo en el otro sentido también)

(no demostramos esta proposición por ahora)

Proposición (Inversa del producto)

Sean $A, B \in K^{n \times n}$. Entonces

A, B inversibles $\iff AB$ inversible

En ese caso: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Para probar que si A y B son inversibles, entonces AB lo es, alcanza con mostrar que AB tiene una a derecha por ejemplo (por la prop anterior).

¿Vale $AB.\,A^{-1}B^{-1} = Id_n$? Mmm...

Lo que sí vale es $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = Id_n$ pues

$AB\,B^{-1}A^{-1} = A\,Id_n\,A^{-1} = A A^{-1} = Id_n$.

Luego $B^{-1}A^{-1}$ es inversa a derecha, y por lo tanto inversa, de AB. Es decir $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

($\Leftarrow$) Mostramos AB inversible $\Rightarrow$ A inversible:

AB inversible $\Rightarrow \exists C : (AB)C = Id_n$. Luego $A(BC) = Id_n$, es decir BC es inversa a derecha, luego inversa, de A, o sea $A^{-1} = BC$.

Hacer la otra demostración: AB inversible $\Rightarrow$ B inversible $\boxtimes$

Proposición (Inversa de la inversa)

A inversible $\Rightarrow$ A^{-1} inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

Notación: $GL(n,K) = \{A \in K^{n\times n} : A \text{ inversible}\}$

- $A, B \in GL(n,K) \Rightarrow AB \in GL(n,K)$
- $A \in GL(n,K) \Rightarrow A^{-1} \in GL(n,K)$

$\Rightarrow$ el producto es asociativo, tiene un elemento neutro Id_n (que pertenece a $GL(n,K)$, ¿por qué?) y todo $A \in GL(n,K)$ tiene inverso en $GL(n,K)$.

Luego: $GL(n,K)$ es un grupo (no abeliano)

Ejercicio:

1) Vimos que en general si $AB = 0$, eso no implica $A = 0$ ó $B = 0$. Pero vale si $A \in GL(n,K)$!

Probar que

a) $AB = 0$ para $A \in GL(n,K)$ y $B \in K^{n\times n} \Rightarrow B = 0$

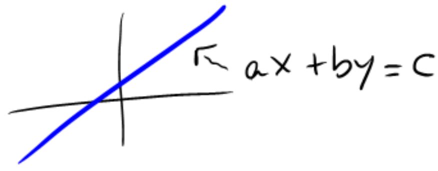
b) $AB = AC$ para $A \in GL(n,K)$, $B, C \in K^{n\times n} \Rightarrow B = C$

2) $A \in GL(n,K) \Rightarrow A^t \in GL(n,K)$ y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

SISTEMAS LINEALES

Definición: Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas con coeficientes en K es un sistema de ecuaciones de la forma:

lineal



$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

donde $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in K$

y $x_1, \dots, x_n$ son las incógnitas

Matricialmente se puede escribir $A \cdot x = b$

donde $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in K^{m \times n}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es el vector (columna) de incógnitas

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^{m \times 1}$ es el vector (columna) constante

Se trata de resolver el sistema, es decir determinar todos los $x \in K^{n \times 1}$ (si los hay) que satisfacen $AX = b$.

Definición (Sistemas equivalentes)

Dos sistemas lineales con n incógnitas son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones en K^n

Operaciones elementales que garantizan la equivalencia

① Intercambiar la i-ésima y j-ésima ecuación

A nivel de la matriz $[A|b]$: $F_i \longleftrightarrow F_j$

(Fila i) (Fila j)

2. Multiplicar la i-ésima ecuación por algún $\mu \in K$ <u>no nulo</u>

A nivel de la matriz $[A|b]$: $F_i \to \mu F_i \quad (\mu \neq 0)$

3. Sumarle a la i-ésima ecuación un múltiplo cualquiera de la j-ésima (con $j \neq i$)

A nivel de la matriz $[A|b]$: $F_i \to F_i + \lambda F_j \quad (\lambda \in K)$

<u>Observación</u>: Estas operaciones elementales en la matriz $[A|b]$ se corresponden con multiplicarla por la izquierda por las **matrices elementales**:

1.

$$T_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array} \in K^{m \times m}$$

2.

$$T_i(\mu) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} & \end{array} \in K^{m \times m} \quad (\mu \neq 0)$$

3.

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array} \in K^{m \times m}$$

Propiedades

① $T_{ij} \in GL(m, K)$, $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$

$T_{ij} \cdot [A|b]$ consiste en $[A|b]$ en hacer $F_i \longleftrightarrow F_j$

② $T_i(\mu) \in GL(m, K)$ para $\mu \neq 0$, $T_i(\mu)^{-1} = T_i(1/\mu)$

$T_i(\mu) \cdot [A|b]$ consiste en $[A|b]$ en hacer $F_i \to \mu F_i$

③ $T_{ij}(\lambda) \in GL(m, K)$, $\forall \lambda \in K$, $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

$T_{ij}(\lambda) \cdot [A|b]$ consiste en $[A|b]$ en hacer $F_i \to F_i + \lambda F_j$

Ejemplo :

$$\left\{ \begin{array}{r} 2y + 4z = 8 \\ 3x + y - z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x - y - 4z = -6 \end{array} \right. \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 3F_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 - 2F_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_2/-2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_3 \to F_3 - 2F_2 \\ F_4 \to F_4 + 3F_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_1 \to F_1 - F_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \leftarrow \text{Forma escalón reducida}$$

(o forma normal de Gauss-Jordan) asociada a $[A|b]$

El sistema original es por lo tanto equivalente al sistema dado por $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, i.e. $\begin{cases} x - z = -1 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$

Se pueden despejar x e y en función de z, y z puede ser cualquiera. Aquí: x, y son variables ligadas
z es variable libre.

$$\begin{aligned} Sol &= \{ (x,y,z) \in K^3 : x = z-1,\ y = -2z+4,\ z \in K \} \\ &= \{ (z-1, -2z+4, z),\ z \in K \} \\ &= \{ (z, -2z, z) + (-1, 4, 0),\ z \in K \} \\ &= \{ z(1,-2,1) + (-1,4,0),\ z \in K \}. \end{aligned}$$

Se pasó del sistema original al reducido multiplicando a izquierda por el producto de matrices elementales:

$$T_{12}(-1)\, T_{42}(3)\, T_{32}(-2)\, T_2(-\tfrac{1}{2})\, T_{41}(-2)\, T_{21}(-3)\, T_{13} =: T$$

que es una matriz inversible.

$$Ax = b \iff TAx = Tb \qquad \boxtimes$$

Carl-Friedrich Gauss, matemático alemán, 1777 - 1855
Wilhem Jordan, ingeniero alemán, 1842 - 1899

Definición: (Matriz escalón reducida)

$A \in K^{m \times n}$ es una matriz escalón reducida si:

- Todas las filas no nulas de A están primero
- Cada fila no nula de A empieza con un 1
- La matriz está "escalonada", es decir cada primer 1 aparece cada vez más a la derecha
- Arriba de cada primer 1 hay sólo 0's ("reducida")

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ & & & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ & & & & 1 & * & * & 0 & * \\ & & & & & & & 1 & * \\ & & & & & & & & \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array}$$

← Matriz A en forma escalón reducida

- ubicaciones correspondientes a variables que se pueden despejar: variables ligadas
- las demás son ubicaciones correspondientes a variables sin condiciones: variables libres.

Aquí: x_1, x_4, x_5, x_8 son ligadas
x_2, x_3, x_6, x_7, x_9 son libres.