Álgebra I - Final - 5/8/2014

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre:

No. de libreta:

Carrera:

---

1. En el conjunto $A = \{2, 3, 4 \ldots, 2^{500}\}$ se define la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 \mid b.$$

   a) Decidir si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

   b) Probar que no es posible elegir $a_1, a_2, \ldots, a_{10} \in A$ de manera que $a_i\mathcal{R}a_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, 9$.

2. Sea $b \in \mathbb{Z}$. Se sabe que $(3b + 6 : 7b - 22)$ tiene exactamente 9 divisores positivos. Hallar los posibles restos de dividir b por 108.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hallar el resto de dividir $12^{11^n} - 9^{4^n}$ por 7.

4. Sea w una raiz 125 primitiva de la unidad. Probar que

$$\mathrm{Re}(w^{25} + w^{50}) = -\frac{1}{2}.$$

5. Se define la siguiente sucesión de polinomios en $\mathbb{R}[X]$ de manera recursiva:

$$f_1 = X^4 - 4X^3 + 14X^2 - 20X + 25,$$
$$f_n = (X^2 - 2X + 5)(f_{n-1} + f'_{n-1}) \qquad \text{si } n \geq 2.$$

   Probar que $1 + 2i$ y $1 - 2i$ son raíces de f_n de multiplicidad exactamente 2 para todo $n \in \mathbb{N}$.