

Álgebra I

Práctica 5 - Polinomios

Números complejos

1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\operatorname{Re}(z^{-1})$, $\operatorname{Im}(z^{-1})$, $\operatorname{Re}(-i \cdot z)$ e $\operatorname{Im}(i \cdot z)$.

i) $z = (2 + i)(1 + 3i)$.

v) $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{179}$.

ii) $z = 5i(1 + i)^4$.

vi) $z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}$.

iii) $z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2(\overline{1 - 3i})$.

vii) $z = \overline{1 - 3i}^{-1}$.

iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1 - i)^3$.

2. Dados $z = 1 + 3i$ y $w = 4 + 2i$, representar en el plano complejo los siguientes números

i) z .

v) $-z$.

ix) \bar{z} .

xiii) $|2z|$.

ii) w .

vi) $2z$.

x) $\overline{3z + 2w}$.

xiv) $|z + w|$.

iii) $z + w$.

vii) $\frac{1}{2}w$.

xi) \overline{iz} .

xv) $|z - w|$.

iv) $z - w$.

viii) iz .

xii) $|z|$.

xvi) $|\overline{w - z}|$.

3. Calcular las raíces cuadradas de los siguientes números complejos z

i) $z = -36$

ii) $z = i$

iii) $z = -3 - 4i$

iv) $z = -15 + 8i$

4. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3 + \sqrt{3}i$.

iii) $(-1 - i)^{-1}$.

v) $(-1 + \sqrt{3}i)^{-5}$.

ii) $(2 + 2i)(\sqrt{3} - i)$.

iv) $(-1 + \sqrt{3}i)^5$.

vi) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}$.

5. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$.

ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / \arg(-iz) > \frac{\pi}{4}\}$.

iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} / |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$.

6. i) Determinar la forma binomial de $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{17}$.

ii) Determinar la forma binomial de $(-1 + \sqrt{3}i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3} - i)^n = 2^{n-1}(-1 + \sqrt{3}i)$.

7. Hallar en cada caso las raíces n -avas de $z \in \mathbb{C}$:

i) $z = 8$, $n = 6$

iv) $z = 2i(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{-1}$, $n = 11$

ii) $z = -4$, $n = 3$

v) $z = (2 - 2i)^{12}$, $n = 6$

iii) $z = -1 + i$, $n = 7$

vi) $z = 1$, $n = 8$.

8. i) Calcular $w + \bar{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$.
 ii) Calcular $w^{73} + \bar{w} \cdot w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$.
 iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$.
 iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \bar{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$.
9. Determinar las raíces n -ésimas *primitivas* de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12 .
10. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\text{i) } \sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0. \qquad \text{ii) } \sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0.$$

11. i) Calcular la suma de las raíces n -ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15$.
 ii) Calcular la suma de las raíces p -ésimas primitivas de la unidad para p primo.
12. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w \quad \text{y} \quad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$

13. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad si y solo si \bar{w} lo es.
14. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$.
15. Sea $w \in G_{35}$ una raíz 35-ava primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{cases} w^{15n} = w^5 \\ w^{14n} = w^{21} \end{cases}$$

16. Sea G_{20} el conjunto de raíces 20-avas de la unidad y G_4 el conjunto de raíces cuartas de la unidad. Sea \sim la relación en G_{20} definida por

$$a \sim b \iff a = \omega b, \text{ para algún } \omega \in G_4,$$

o sea dos elementos están relacionados si uno es un múltiplo del otro por una raíz cuarta de la unidad.

- i) Probar que \sim es una relación de equivalencia.
 ii) ¿Cuántas clases de equivalencia hay en total?

Polinomios: generalidades.

17. Calcular el grado y el coeficiente principal de $f \in \mathbb{Q}[X]$ en los casos

$$\begin{aligned} \text{i) } & f = (4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}. \\ \text{ii) } & f = (-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7. \\ \text{iii) } & f = (-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}. \end{aligned}$$

18. Calcular el coeficiente de X^{20} de f en los casos

$$\begin{aligned} \text{i) } & f = (X^{18} + X^{16} + 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) \text{ en } \mathbb{Q}[X] \text{ y en } (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]. \\ \text{ii) } & f = (X - 3i)^{133} \text{ en } \mathbb{C}[X]. \\ \text{iii) } & f = (X - 1)^4(X + 5)^{19} + X^{33} - 5X^{20} + 7 \text{ en } \mathbb{Q}[X]. \\ \text{iv) } & f = X^{10}(X^5 + 4)^7 \text{ en } (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]. \end{aligned}$$

19. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$.

iii) $(X + 1)f^2 = X^3 + Xf$.

ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$.

iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \text{gr}(f) \cdot X^2f$.

20. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4$, $g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

ii) $f = 8X^4 + 6X^3 - 2X^2 + 14X - 4$, $g = 2X^3 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

iii) $f = 4X^4 + X^3 - 4$, $g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

iv) $f = X^5 + X^3 + X + 1$, $g = 2X^2 + 1$ en $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.

v) $f = X^n - 1$, $g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

21. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$.

ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$.

iii) El resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

22. *Definición:* Sea K un cuerpo y sea $h \in K[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f, g \in K[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h \mid f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g \pmod{h}$.

Probar que

i) $\equiv \pmod{h}$ es una relación de equivalencia en $K[X]$.

ii) Si $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$ y $f_2 \equiv g_2 \pmod{h}$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 \pmod{h}$ y $f_1 \cdot f_2 \equiv g_1 \cdot g_2 \pmod{h}$.

iii) Si $f \equiv g \pmod{h}$ entonces $f^n \equiv g^n \pmod{h}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iv) r es el resto de la división de f por h si y sólo si $f \equiv r \pmod{h}$ y $r = 0$ ó $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

23. Hallar el resto de la división de f por h para

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $h = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$, $h = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, $h = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

24. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $a \in K$. Probar que en $K[X]$ vale:

i) $X - a \mid X^n - a^n$.

ii) Si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$.

iii) Si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$.

Calcular los cocientes en cada caso.

25. Calcular el máximo común divisor entre f y g y escribirlo como combinación lineal de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2$, $g = X^4 - X^3 - X^2 + 1$.

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1$, $g = X^3 + X$.

iii) $f = X^5 + X^4 - X^3 + 2X - 3$, $g = X^4 + 2X + 1$.

Polinomios: evaluación y raíces.

26. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

27. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$.

38. Determinar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + a$ tiene al menos una raíz múltiple en \mathbb{C} .
39. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en \mathbb{C} . Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.
40. i) Probar que para todo $a \in \mathbb{C}$, el polinomio $f = X^6 - 2X^5 + (1+a)X^4 - 2aX^3 + (1+a)X^2 - 2X + 1$ es divisible por $(X-1)^2$.
ii) Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f es divisible por $(X-1)^3$.
41. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que a sea raíz *doble* de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$.
42. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ tiene todas sus raíces simples.
43. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^4 + 2X^2 + 1 \quad y \quad f_{n+1} = (X-i)(f_n + f'_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que i es raíz *doble* de f_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

44. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios definida por

$$f_1 = X^3 + 2X - 1 \quad y \quad f_{n+1} = Xf_n^2 + X^2f'_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $\text{gr}(f_n) = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

45. i) Sea $f \in \mathbb{C}[X]$. Probar que $a \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad k de f si y sólo si es raíz de multiplicidad $k-1$ de $(f : f')$.
ii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$. Probar que si f es irreducible, entonces tiene todas sus raíces (en \mathbb{C}) simples.

Polinomios: factorización.

46. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios

$$\begin{array}{lll} \text{i)} X^6 - 8. & \text{iii)} X^7 - (-1+i). & \text{v)} X^6 - (2-2i)^{12}. \\ \text{ii)} X^4 + 3. & \text{iv)} X^{11} - 2i(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{-1}. & \text{vi)} X^{12} + X^6 + 1. \end{array}$$

47. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

$$\text{i)} X^3 - 1. \quad \text{ii)} X^4 - 1. \quad \text{iii)} X^6 - 1. \quad \text{iv)} X^8 - 1.$$

48. Factorizar en $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

$$\text{i)} X^6 - 8. \quad \text{ii)} X^4 + 3. \quad \text{iii)} X^{12} + X^6 + 1.$$

49. Factorizar los polinomios

$$\begin{array}{ll} \text{i)} X^4 - \bar{1} \text{ en } (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X] \text{ y } (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X] & \text{iii)} X^4 - \bar{1} \text{ en } (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X] \\ \text{ii)} X^4 + \bar{3} \text{ en } (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X] & \text{iv)} X^4 + X^3 + X^2 \text{ en } (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]. \end{array}$$

50. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\sum_{k=0}^n X^k$ tiene todas sus raíces complejas simples.

51. i) Hallar todas las raíces racionales de
(a) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$.

- (b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$.
 (c) $3X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 3X - 2$.
- ii) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales.
52. i) Hallar todas las raíces complejas de $f = X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz de f .
 ii) Hallar $f \in \mathbb{Q}[X]$ mónico de grado mínimo que tenga a $1 + 2\sqrt{5}$ y a $3 - \sqrt{2}$ como raíces.
 iii) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio de grado 5. Probar que si $\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{3}$ son raíces de f entonces f tiene una raíz racional.
 iv) Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1 + \sqrt{2}) = 3$, $f(2 - \sqrt{3}) = 3$ y $f(1 + \sqrt{5}) = 3$. Calcular el resto de la división de f por $(X^2 - 2X - 1)(X^2 - 4X + 1)(X^2 - 2X - 4)$.
53. Factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$
- i) $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$.
 ii) $X^4 - 6X^2 + 1$.
 iii) $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ sabiendo que $1 + 2i$ es raíz.
 iv) $X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 - 1$ sabiendo que $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ es raíz.
 v) $f = X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ sabiendo que $\sqrt{2}i$ es raíz múltiple de f .
 vi) $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.
 vii) $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 13X^2 - 15X + 10$ sabiendo que una de sus raíces es una raíz sexta primitiva de la unidad.
54. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = X^4 - (a+4)X^3 + (4a+5)X^2 - (5a+2)X + 2a$ tenga a a como raíz *doble*. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
55. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 2 es una raíz múltiple del polinomio
- $$f = aX^5 + 8X^4 - 26X^3 + 44X^2 - 40X - (32a + 16).$$
- Para cada valor de a hallado factorizar el polinomio en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$.
56. Hallar todos los $a \in \mathbb{C}$ para los cuales al menos una de las raíces de
- $$f = X^6 + X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$$
- sea una raíz sexta primitiva de la unidad.
 Para cada valor de $a \in \mathbb{Q}$ hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.
57. Sea $z \in \mathbb{C}$ y sea $f_z = X^3 - 2zX^2 - z^2X + 2z \in \mathbb{C}[X]$.
- i) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ las tres raíces de f_z . Probar que $\alpha\beta\gamma = -2z$.
 ii) Determinar los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales f_z tiene dos raíces cuyo producto es igual a 2. Para cada valor hallado factorizar f_z en $\mathbb{C}[X]$.
58. Sean a, b y c las raíces complejas de $2X^3 - 3X^2 + 4X + 1$.
- i) Hallar
- | | | |
|--------------------|-----------------------|---|
| (a) $a + b + c$ | (d) $a^2 + b^2 + c^2$ | (g) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ |
| (b) $ab + ac + bc$ | (e) $a^3 + b^3 + c^3$ | (h) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ |
| (c) abc | (f) $a^4 + b^4 + c^4$ | (i) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ |
- ii) Encontrar un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $a + b$, $a + c$ y $b + c$
59. Factorizar el polinomio $X^4 + X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$ sabiendo que la suma de tres de sus raíces es $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

60. Hallar todas las raíces complejas del polinomio $X^6 - X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 8X - 6$ sabiendo que tiene dos raíces cuya suma es 2 y cuyo producto es -6
61. i) ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?
- ii) Sea p un número primo. ¿Cuántos polinomios mónicos de grado 2 hay en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$? ¿Cuántos de ellos son reducibles y cuántos irreducibles?