Números naturales, principio de inducción

1. Conjuntos inductivos.

Denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, cuyos elementos son suma de un número finito de unos. Recordemos que $\mathbb{N}$ es cerrado para la suma y el producto (la suma y el producto de números naturales son números naturales), pero no lo es para la resta o la división ($4 - 9 \notin \mathbb{N}$ y $\frac{7}{5} \notin \mathbb{N}$).

Diremos que un subconjunto S de $\mathbb{R}$ es *inductivo* si se satisfacen:
i) $1 \in S$
ii) $k \in S \Longrightarrow k + 1 \in S$

Ejemplos.

i) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{\geq 1}$ son inductivos.

ii) $\mathbb{R}_{<5}$ no es inductivo pues satisface i) pero no satisface ii)

iii) $\emptyset$ no es inductivo pues satisface ii) pero no satisface i)

iv) $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \leq 3\}$ no es inductivo pues no satisface ii): $\sqrt{2} \in S$ pero $\sqrt{2} + 1 \notin S$

v) $\mathbb{N}$ es inductivo.

Ejercicio. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son inductivos?

a) $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < \frac{3}{2} \text{ o } x \geq \frac{7}{2}\}$

b) $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 6x^2 - 2x + 2 \geq 4\}$

c) $S_3 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -x \in S_2\}$

d) $S_4 = \mathbb{N} - \{11\}$

e) $S_6 = \{a \in \mathbb{Z} \,/\, a > -3\}$

Notemos que si $S \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto inductivo entonces $1 \in S$ por i). Pero esto implica que $2 \in S$ por ii) y luego $3 \in S$ nuevamente por ii), etc. Luego, $\mathbb{N} \subseteq S$. Por lo tanto, $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo que está contenido en todos los conjuntos inductivos. Si consideramos el orden en los conjuntos dado por $\subseteq$, esto puede resumirse en la forma: $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo que es menor que todo otro conjunto inductivo.
Supongamos ahora que H es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que tiene esta propiedad, es decir, H es inductivo y H está contenido en todos los conjuntos inductivos. Entonces debe ser $H = \mathbb{N}$ (¿porque?) y esto significa que $\mathbb{N}$ es el **único** conjunto inductivo que está contenido en todos los conjuntos inductivos. Si quisiéramos dar una definición rigurosa del conjunto de números naturales podríamos definirlo como el único conjunto inductivo que está contenido en todos los conjuntos inductivos, es decir, la intersección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son inductivos.

Observación. De lo anterior se deduce que si H es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisface
i) $1 \in H$
ii) $k \in H \Longrightarrow k+1 \in H$
entonces $H = \mathbb{N}$.

2. Principio de inducción.

Sea $P(n)$ una función proposicional predicable sobre $\mathbb{N}$. Si valen
1) $P(1)$ es verdadera
2) $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$
entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $H = \{h \in \mathbb{N} \,/\, P(h) \text{ es verdadera}\}$. Entonces H es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisface

i) $1 \in H$
ii) $k \in H \Longrightarrow k+1 \in H$
Luego, por la observación anterior, $H = \mathbb{N}$ y por lo tanto $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Resumiendo, el principio de inducción dice que para probar que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ alcanza con probar que valen 1) y 2).

Ejemplos.

a) $P(n): \ n+3 \geq n+7$ satisface 2) pues $k+3 \geq k+7 \Longrightarrow k+1+3 \geq k+1+7$ pero sin embargo $P(n)$ no es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que sucede en este caso es que $P(1)$ es falsa. Esto muestra que **es necesario probar que** $P(1)$ **es verdadera**.

b) $P(n): \ n \leq 7$ satisface 1) pero sin embargo $P(n)$ no es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que sucede es que no se satisface 2) pues $P(7)$ no implica $P(8)$ ya que $P(7)$ es verdadera y $P(8)$ es falsa. Esto muestra que **es necesario probar que** $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$.

c) $P(n): \ 5^n \geq 2^n + 3^n$. Veamos que en este caso valen 1) y 2) y por lo tanto $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Es claro que $P(1): \ 5 \geq 2+3$ es verdadera. Sea $k \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$, es decir, $5^k \geq 2^k + 3^k \Longrightarrow 5^{k+1} \geq 2^{k+1} + 3^{k+1}$

Supongamos que $5^k \geq 2^k + 3^k$ (esta es la *hipótesis inductiva* a la que abreviaremos con HI). Debemos probar que $5^{k+1} \geq 2^{k+1} + 3^{k+1}$

$$5^{k+1} = 5.5^k \underset{por\ HI}{\geq} 5.(2^k + 3^k) = 5.2^k + 5.3^k \underset{5\geq 2}{\geq} 2.2^k + 5.3^k \underset{5\geq 3}{\geq} 2.2^k + 3.3^k = 2^{k+1} + 3^{k+1}$$

Luego, $5^n \geq 2^n + 3^n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

d) $P(n): \ n^5 \geq n^4$. Si bien puede demostrarse que $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$ utilizando el principio de inducción, notemos que la siguiente demostración es mucho más corta y sencilla: dado $n \in \mathbb{N}$

$$n^5 \geq n^4 \iff \frac{n^5}{n^4} \geq 1 \iff n \geq 1$$

Como $n \geq 1$ pues $n \in \mathbb{N}$ entonces $n^5 \geq n^4$.

Moraleja: El principio de inducción es una herramienta útil pero no siempre es la manera más conveniente de demostrar que $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

e) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida inductivamente en la forma

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = 2a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Calculemos algunos valores de a_n: $a_1 = 3$, $a_2 = 2a_1 = 2.3$, $a_3 = 2a_2 = 2.2.3 = 2^2.3$, $a_4 = 2a_3 = 2.2^2.3 = 2^3.3$, ... Al parecer vale que $a_n = 3.2^{n-1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Probemos esto utilizando el principio de inducción para la función proposicional $P(n):\ a_n = 3.2^{n-1}$

Es claro que $P(1):\ a_1 = 3.2^0$ es verdadera ya que $a_1 = 3$.

Sea $h \in \mathbb{N}$. Veamos que $P(h) \Longrightarrow P(h+1)$, es decir, $a_h = 3.2^{h-1} \Longrightarrow a_{h+1} = 3.2^h$. La hipótesis inductiva es

$$a_h = 3.2^{h-1}$$

y debemos probar que $a_{h+1} = 3.2^h$. Por definición de la sucesión, $a_{h+1} = 2a_h$. Ahora, usando esto y la hipótesis inductiva se tiene que

$$a_{h+1} = 2a_h = 2.3.2^{h-1} = 3.2.2^{h-1} = 3.2^h$$

como queríamos probar. Luego, $a_n = 3.2^{n-1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

f) $P(n):\ 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Probemos que $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Es claro que $P(1):\ 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ es verdadera.

Dado $n \in \mathbb{N}$, veamos que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Longrightarrow 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

En este caso la hipótesis inductiva es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

y debemos probar que $1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Utilizando la hipótesis inductiva vemos que

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio. Consideremos la función proposicional $P(n)$: si un conjunto de n seres vivos contiene un conejo entonces todos sus elementos son conejos.
"Demostraremos" por inducción que $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$, el sueño de todo mago: convertir a toda la audiencia en conejos con sólo sacar un conejo de la galera. Si Ud. no quiere ser convertido en conejo, encuentre el error.
Es claro que $P(1)$ es verdadera. Probemos que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
HI) si un conjunto de n seres vivos contiene un conejo entonces todos sus elementos son conejos.
Debemos probar que si A es un conjunto de $n+1$ seres vivos que contienen un conejo entonces todos los elementos de A son conejos. Sea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ un conjunto de $n+1$ seres vivos donde x_1 es un conejo. Luego, el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un conjunto de n seres vivos que contiene un conejo y por lo tanto, por HI, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son conejos. Ahora, el conjunto $\{x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ es un conjunto de n seres vivos y sabemos por lo que probamos recién que x_2 es un conejo. Luego, usando nuevamente la HI resulta que $x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$ son conejos. Hemos probado entonces que $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ son todos conejos.

Sumatoria. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos la *sumatoria desde* $i = 1$ *hasta* n *de* a_i, a la que denotaremos por $\sum_{i=1}^{n} a_i$, inductivamente en la forma

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \ + a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Calculemos algunos valores de esta sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1,\ \sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{i=1}^{1} a_i + a_2 = a_1 + a_2,\ \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{2} a_i + a_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots$$

En general, $\sum_{i=1}^{n} a_i$ es una manera de escribir la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ evitando los puntos suspensivos.

Ejemplos. 1) Tomando $a_i = i$ para todo i resulta que $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

2) Tomando $a_i = (1+i)^2$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} (1+i)^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n+1)^2$

3) Tomando $a_i = 1$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} 1 = 1+1+1+\cdots+1$ (n sumandos), es decir, $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

Ejercicio. i) ¿Es cierto que $\sum_{i=1}^{n+1} (n+1+i) = \sum_{i=1}^{n} (n+i) \ + 2(n+1)$? (Si su respuesta es sí mejor piénselo un rato más).

ii) ¿Es cierto que $\sum_{i=1}^{2^{n+1}}(3i-1) = \sum_{i=1}^{2^n}(3i-1) \ + 3.2^{n+1} - 1$?

Propiedades de la sumatoria. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces valen

1) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

2) $\sum_{i=1}^{n}(c.a_i) = c. \sum_{i=1}^{n} a_i$

Ejercicio. Demostrar las propiedades de la sumatoria utilizando el principio de inducción.

Ejemplo. Antes probamos que $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Calcularemos el valor de otras sumatorias, utilizando esto y las propiedades de la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+3) = \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 3 = 2 \sum_{i=1}^{n} i + 3 \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\,\frac{n(n+1)}{2} + 3n = n^2 + 4n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(n+i) = \sum_{i=1}^{n} n + \sum_{i=1}^{n} i = n \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} i = n.n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$$

Si $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es una sucesión de números reales, definimos

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

y, si k es un número natural mayor que 1 y menor o igual que n, definimos

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i$$

Notar que si k es un número natural mayor que 1 y menor que n entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

Ejemplo. Calculemos $\sum_{j=7}^{n} 2j$.

$$\sum_{j=7}^{n} 2j = \sum_{j=1}^{n} 2j - \sum_{j=1}^{6} 2j = 2 \sum_{j=1}^{n} j - 2 \sum_{j=1}^{6} j = 2\frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{6(6+1)}{2} = n^2 + n - 42$$

Cambio de índices. Dejamos como ejercicio al lector convencerse de que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} (i+3) = \sum_{i=4}^{n+3} i$$

¿Es cierto que $\sum_{i=1}^{n+1} (n+1+i) = \sum_{i=2}^{n+2} (n+i)$? ¿Es cierto que $\sum_{i=1}^{n+1} (n+1+i) = \sum_{i=n+2}^{2n+2} i$?

Ejemplo difícil. Probaremos por inducción que $\sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) = \dfrac{2^{3n} + 2^{2n+1} + 2^{2n} + 2^{n+1}}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando las propiedades de la sumatoria y un cambio de índices.

Dejamos como ejercicio verificar que $P(1) : \sum_{i=1}^{2} i(i+1) = \dfrac{2^3 + 2^3 + 2^2 + 2^2}{3}$ es verdadera.

HI) $\sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) = \dfrac{2^{3n} + 2^{2n+1} + 2^{2n} + 2^{n+1}}{3}$

Debemos probar que $\sum_{i=1}^{2^{n+1}} i(i+1) = \dfrac{2^{3(n+1)} + 2^{2(n+1)+1} + 2^{2(n+1)} + 2^{(n+1)+1}}{3}$, es decir que

$$\sum_{i=1}^{2^{n+1}} i(i+1) = \frac{2^{3n+3} + 2^{2n+3} + 2^{2n+2} + 2^{n+2}}{3}$$

Allá vamos...

$$\sum_{i=1}^{2^{n+1}} i(i+1) = \sum_{i=1}^{2.2^n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{2^n+2^n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) + \sum_{i=1+2^n}^{2^n+2^n} i(i+1) =$$

haciendo el cambio de índices $j = i - 2^n$, es decir, $i = j + 2^n$

$$= \sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) + \sum_{j=1}^{2^n} (j+2^n)(j+1+2^n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) + \sum_{j=1}^{2^n} [j(j+1) + j.2^n + (j+1).2^n + 2^n.2^n] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) + \sum_{j=1}^{2^n} [j(j+1) + j.2^n + j.2^n + 2^n + 2^n.2^n] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) + \sum_{j=1}^{2^n} [j(j+1) + 2j.2^n + 2^n + 2^{2n}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) + \sum_{j=1}^{2^n} [j(j+1) + 2^{n+1}j + 2^n + 2^{2n}] =$$

usando las propiedades de sumatoria

$$= \sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) + \sum_{j=1}^{2^n} j(j+1) + 2^{n+1}\sum_{j=1}^{2^n} j + \sum_{j=1}^{2^n}(2^n + 2^{2n}) =$$
$$= 2\sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) + 2^{n+1}\sum_{j=1}^{2^n} j + (2^n + 2^{2n})\sum_{j=1}^{2^n} 1 =$$

usando la hipótesis inductiva y usando que $\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$ y $\sum_{j=1}^{m} 1 = m$

$$= 2\frac{2^{3n} + 2^{2n+1} + 2^{2n} + 2^{n+1}}{3} + 2^{n+1}\frac{2^n(2^n+1)}{2} + (2^n + 2^{2n}).2^n =$$
$$= \frac{2^{3n+1} + 2^{2n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+2}}{3} + 2^n.2^n(2^n+1) + 2^{2n} + 2^{3n} =$$
$$= \frac{2^{3n+1} + 2^{2n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+2}}{3} + 2^{3n} + 2^{2n} + 2^{2n} + 2^{3n} =$$
$$= \frac{2^{3n+1} + 2^{2n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+2}}{3} + 2.2^{3n} + 2.2^{2n} =$$
$$= \frac{2^{3n+1} + 2^{2n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+2}}{3} + 2^{3n+1} + 2^{2n+1} =$$
$$= \frac{2^{3n+1} + 2^{2n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+2} + 3.2^{3n+1} + 3.2^{2n+1}}{3} =$$
$$= \frac{4.2^{3n+1} + 2^{2n+2} + 4.2^{2n+1} + 2^{n+2}}{3} =$$
$$= \frac{2^{3n+3} + 2^{2n+2} + 2^{2n+3} + 2^{n+2}}{3}$$

como queríamos probar.

Ejercicio. Probar que $\sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) = \frac{2^{3n} + 2^{2n+1} + 2^{2n} + 2^{n+1}}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de la siguiente manera:

i) Probar por inducción que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

ii) Probar que $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ usando i) y las propiedades de la sumatoria.

iii) Deducir de ii) que $\sum_{i=1}^{2^n} i(i+1) = \frac{2^{3n} + 2^{2n+1} + 2^{2n} + 2^{n+1}}{3}$

Productoria. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos la *productoria desde* $i=1$ *hasta* n *de* a_i, a la que denotaremos por $\prod_{i=1}^{n} a_i$, inductivamente en la forma

$$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1, \qquad \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) a_{n+1} \quad (n\in\mathbb{N})$$

Esta es una manera de escribir el producto $a_1.a_2.\ldots.a_n$ evitando los puntos suspensivos.

3. Números combinatorios.

Dado $n\in\mathbb{N}_0$ (donde $\mathbb{N}_0$ denota el conjunto $\mathbb{N}\cup\{0\}$) definimos el *factorial* de n como

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ \prod_{i=1}^{n} i & \text{si } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Ejemplos. i) $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$

ii) $7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5040$

iii) $(n+1)! = n!\,(n+1)$ para todo $n\in\mathbb{N}_0$

Dados $n,k\in\mathbb{N}_0$, $0\le k\le n$, definimos el *número combinatorio* n,k como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ejemplos. i) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$ y $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$

ii) $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$ y $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$

iii) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.1.2.3.4} = 35$

Proposición. Sean $n,k\in\mathbb{N}_0$. Entonces valen

i) si $0\le k\le n$ entonces $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

ii) si $1\le k\le n$ entonces $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Demostración: i) ejercicio.

ii) Se tiene que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} = \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \\ &= \frac{(n-k+1)n!}{k!\,(n-k+1)!}+\frac{k\,n!}{k!\,(n-k+1)!} = \\ &= \frac{(n-k+1)n!+k\,n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)n!}{k!\,(n-k+1)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} \ \square\end{aligned}$$

Triángulo de Tartaglia. Consideremos el siguiente "triángulo"

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& \binom{0}{0} &&&&& \\ &&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&& \\ &&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&& \\ && \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} && \\ & \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} \end{array}$$

Entonces podemos calcular los números combinatorios comenzando por la primera fila, luego la segunda, luego la tercera, etc. de la siguiente manera: si hemos calculado los números combinatorios de una fila, para calcular los de la siguiente basta usar que en cada extremo debe haber un 1 pues $\binom{n}{0}=1$ y $\binom{n}{n}=1$ para todo n y que, por la parte ii) de la proposición anterior cada uno de los números combinatorios que queremos calcular es la suma de los dos números que están inmediatamente a la izquierda y a la derecha de él en la fila anterior. Así obtenemos

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \end{array}$$

Notemos que por i) de la proposición, el triángulo es simétrico respecto del eje vertical.

Ejercicio. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Probar que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $0 \le k \le n$, el número combinatorio $\binom{n}{k}$ es un número natural.

Ayudita: Sea $P(n):\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$ tal que $0 \le k \le n$ el número combinatorio $\binom{n}{k}$ es un número natural.

Pruebe que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$ usando el principio de inducción.

Binomio de Newton. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ Entonces, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Demostración: Dejamos como ejercicio verificar que vale para $n = 1$, es decir, que

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k}$$

Probemos que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. La hipótesis inductiva es: $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Debemos probar que $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$. Usando la hipótesis inductiva se tiene que

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de índices $j = k+1$ en la primera suma

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} =
\end{aligned}$$

usando ii) de la proposición

$$\begin{aligned}
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Ejemplos.

1) $$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k} = \binom{3}{0} a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b^1 + \binom{3}{3} a^3 b^0 =$$

$$= b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3$$

2) $$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^k b^{5-k} = \binom{5}{0} a^0 b^5 + \binom{5}{1} a^1 b^4 + \binom{5}{2} a^2 b^3 + \binom{5}{3} a^3 b^2 +$$

$$+ \binom{5}{4} a^4 b^1 + \binom{5}{5} a^5 b^0 = b^5 + 5ab^4 + 10a^2 b^3 + 10a^3 b^2 + 5a^4 b + a^5$$

3) $$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i \, 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

4. Principio de inducción "corrido".

Sea $P(n)$ una función proposicional predicable sobre $\mathbb{N}$ y sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Si se verifican:
i) $P(n_0)$ es verdadera
ii) $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$
Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$
Dejamos la demostración como ejercicio. Notar que basta probar que $P(m-1+n_0)$ es verdadera para todo $m \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Probaremos que $2^n \geq (n+1)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 6$.
i) $P(6)$ es verdadera pues $2^6 = 64 \geq 49 = (6+1)^2$
ii) Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 6$ y supongamos que $2^k \geq (k+1)^2$. Vamos a probar que $2^{k+1} \geq (k+2)^2$.

$$2^{k+1} = 2.2^k \underset{por\ HI}{\geq} 2(k+1)^2$$

Luego basta demostrar que $2(k+1)^2 \geq (k+2)^2$. Hagamos eso:

$$2(k+1)^2 \geq (k+2)^2 \Longleftrightarrow 2(k^2+2k+1) \geq k^2+4k+4 \Longleftrightarrow 2k^2+4k+2 \geq k^2+4k+4 \Longleftrightarrow k^2 \geq 2$$

y $k^2 \geq 2$ pues $k \geq 6$. Luego hemos probado que $2^n \geq (n+1)^2$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 6$.

5. Principio de buena ordenación.

Diremos que un subconjunto S de $\mathbb{R}$ *posee un primer elemento* si $\exists\, s \in S$ tal que $s \leq x$ $\forall\, x \in S$. En tal caso diremos que s es el *primer elemento* de S.

Diremos que un subconjunto H de $\mathbb{R}$ es *bien ordenado* si **todo** suconjunto no vacío de H posee un primer elemento.

Ejemplos. i) $H = \{1, \sqrt{2}, -5, \frac{7}{3}\}$ es bien ordenado.

ii) $H = \{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ no es bien ordenado pues el subconjunto no vacío $\{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ no posee un primer elemento.

Ejercicio. $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq \sqrt{2}\}$

i) Mostrar que S posee un primer elemento

ii) Probar que S no es bien ordenado.

Teorema. (Principio de buena ordenación) El conjunto $\mathbb{N}$ es bien ordenado.

Demostración: Consideremos la función proposicional

$$P(n) : \text{Si } H \subseteq \mathbb{N} \text{ y } n \in H \text{ entonces } H \text{ posee un primer elemento}$$

Probaremos que $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$ usando el principio de inducción. Veamos primero que $P(1)$ es verdadera:

$$P(1) : \text{Si } H \subseteq \mathbb{N} \text{ y } 1 \in H \text{ entonces } H \text{ posee un primer elemento}$$

Sea H un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in H$. Debemos ver que H posee un primer elemento, es decir, que $\exists\, h \in H$ tal que $h \leq x$ $\forall\, x \in H$. Tomando $h = 1 \in H$ se tiene que $1 \leq x$ para todo $x \in H$ pues $H \subseteq \mathbb{N}$. Luego, 1 es el primer elemento de H.

HI) Si $K \subseteq \mathbb{N}$ y $n \in K$ entonces K posee un primer elemento

Sea H un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $n + 1 \in H$. Debemos probar que H posee un primer elemento.

Primer caso: $n \in H$. En este caso H posee un primer elemento por HI.

Segundo caso: $n \notin H$. Sea $K = H \cup \{n\}$. Entonces K posee un primer elemento k por HI, es decir, existe $k \in K$ tal que $k \leq x$ $\forall x \in K$. En particular, como $H \subseteq K$, $k \leq x$ $\forall x \in H$. Si $k \neq n$ entonces $k \in H$ y $k \leq x$ $\forall x \in H$ de donde k es el primer elemento de H. Y si, en cambio, $k = n$, entonces $n \leq x$ $\forall x \in H$ y, como $n \notin H$ resulta que $n < x$ $\forall x \in H$. Pero esto implica que $n + 1 \leq x$ $\forall x \in H$ pues $H \subseteq \mathbb{N}$. Luego, $n + 1 \in H$ y $n + 1 \leq x$ $\forall x \in H$, es decir, $n + 1$ es el primer elemento de H.

Luego $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que $\mathbb{N}$ es bien ordenado. Debemos probar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ posee un primer elemento. Sea H un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ y sea $h \in H$ (h existe pues $H \neq \emptyset$). Como $h \in \mathbb{N}$ pues $H \subseteq \mathbb{N}$, entonces $P(h)$ es verdadera y por lo tanto H posee un primer elemento. $\square$

6. Principio de inducción global.

Sea $P(n)$ una función proposicional predicable sobre $\mathbb{N}$. Si se verifican:

i) $P(1)$ es verdadera
ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale: si $P(k)$ es verdadera $\forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$ entonces $P(n+1)$ es verdadera

Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $H = \{n \in \mathbb{N} \,/\, P(n) \text{ es falsa}\}$. Queremos ver que $H = \emptyset$. Supongamos que no, entonces H es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Luego, por el principio de buena ordenación, existe $h \in H$ tal que $h \leq x$ para todo $x \in H$. Como $h \in H$ entonces $h \in \mathbb{N}$ y $P(h)$ es falsa. Luego $h \neq 1$ por i) de donde $h > 1$ y por lo tanto $n = h - 1 \in \mathbb{N}$. Además, si k es un número natural menor o igual que n entonces $k \leq n = h - 1 < h$ y como h es el primer elemento de H resulta que $k \notin H$ de donde $P(k)$ es verdadera.
Luego, n es un número natural y $P(k)$ es verdadera $\forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$. Por lo tanto, usando ii) resulta que $P(n+1)$ es verdadera. Pero esto es una contradicción pues $P(n+1) = P(h)$ es falsa. □

Ejemplos. 1) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2^{n-1} \ (n \geq 2)$$

Probaremos, usando el principio de inducción global, que $a_n = n + 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$P(1): \ a_1 = 1 + 2^1$ es verdadera pues $a_1 = 3$
Veamos ahora el paso inductivo: sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $P(k)$ es verdadera $\forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$, es decir, que $a_k = k + 2^k \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$. Debemos probar que $a_{n+1} = n + 1 + 2^{n+1}$.

Primer caso: $n = 1$. En este caso $a_{n+1} = a_2 = 6 = 2 + 2^2 = n + 1 + 2^{n+1}$

Segundo caso: $n \geq 2$. En este caso $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2^{n-1}$. Luego, como $n \geq 2$, n y $n-1$ son números naturales menores o iguales que n y por lo tanto, por hipótesis inductiva, $a_n = n + 2^n$ y $a_{n-1} = n - 1 + 2^{n-1}$. Luego,

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2^{n-1} = 2(n + 2^n) - (n - 1 + 2^{n-1}) + 2^{n-1} = n + 1 + 2^{n+1}$$

2) Sea $F : \mathbb{N} \Longrightarrow \mathbb{N}$ la función definida por

$$F(1) = 11, \qquad \text{y para } n \geq 2 \quad F(n) = \begin{cases} \left(F\left(\frac{n}{2}\right) - 7\right)^2 & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ n - 1 + 5F(n-2) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Probaremos que $F(n) \geq 9 + 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ usando el principio de inducción global.

Antes de comenzar la demostración, calculemos algunos valores de $F(n)$:

$$F(1) = 11,\ F(2) = (F(1) - 7)^2 = 16,\ F(3) = 3 - 1 + 5F(3 - 2) = 2 + 5F(1) = 57,$$
$$F(4) = (F(2) - 7)^2 = 81,\ F(5) = 5 - 1 + 5F(5 - 2) = 4 + 5F(3) = 289$$

Ahora veamos que $F(n) \geq 9 + 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$: $P(1)$: $F(1) \geq 9 + 2^1$ es verdadera pues $F(1) = 11$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $P(k)$ es verdadera $\forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$, es decir, $F(k) \geq 9 + 2^k\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$. Debemos probar que $P(n+1)$ es verdadera, es decir, que $F(n + 1) \geq 9 + 2^{n+1}$.
Como $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \geq 2$ y por lo tanto

$$F(n+1) = \begin{cases} (F(\frac{n+1}{2}) - 7)^2 & \text{si } n + 1 \text{ es par} \\ \\ n + 5F(n - 1) & \text{si } n + 1 \text{ es impar} \end{cases}$$

Primer caso: $n + 1$ es par. En este caso $F(n + 1) = (F(\frac{n+1}{2}) - 7)^2$ y como $n + 1$ es par entonces $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$ y $\frac{n+1}{2} \leq n$. Luego, por HI, $F(\frac{n+1}{2}) \geq 9 + 2^{\frac{n+1}{2}}$. Por lo tanto

$$F(n+1) = (F(\tfrac{n+1}{2}) - 7)^2 \geq (9 + 2^{\frac{n+1}{2}} - 7)^2 = (2 + 2^{\frac{n+1}{2}})^2 = 4 + 4.2^{\frac{n+1}{2}} + 2^{n+1} \geq 9 + 2^{n+1}$$

ya que $2^{\frac{n+1}{2}} \geq 2$ pues $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$.

Segundo caso: $n + 1$ es impar. En este caso, como $n \in \mathbb{N}$ y $n + 1$ es impar, $n + 1 \geq 3$ y es impar. Luego $F(n + 1) = n + 5F(n - 1)$. Como $n + 1 \geq 3$ entonces $n - 1 \in \mathbb{N}$ y $n - 1 \leq n$. Luego, por HI, $F(n - 1) \geq 9 + 2^{n-1}$ y $n \geq 2$ de donde

$$F(n + 1) = n + 5F(n - 1) \geq n + 5(9 + 2^{n-1}) \geq 2 + 45 + 5.2^{n-1} \geq 9 + 4.2^{n-1} = 9 + 2^{n+1}$$

3) El 1/6/2000 se colocaron 2 bacterias en un recipiente. Cada bacteria tiene 4 hijos el 30/1 de cada año y muere al día siguiente de su tercera reproducción. Sea a_n $(n \geq 0)$ la cantidad de bacterias que hay en el recipiente en diciembre del año $2000 + n$. Trataremos de ver cuánto vale a_n.
En diciembre del año 2000 las bacterias que hay en el recipiente son las 2 que se colocaron en junio, luego $a_0 = 2$. A fines del año 2001 las bacterias que hay en el recipiente son las 2 que se colocaron originalmente más los 4 hijos de cada una de ellas que nacieron en enero de 2001, luego $a_1 = 2 + 4.2 = 10$.
En diciembre del año 2002 las bacterias que hay en el recipiente son las 10 que había a fines del 2001 más los 4 hijos de cada una de ellas que nacieron en enero de 2002, luego $a_2 = 10 + 4.10 = 50$.
En diciembre del año 2003 las bacterias que hay en el recipiente son las 50 que había a fines del 2002 más los 4 hijos de cada una de ellas que nacieron en enero de 2003 menos las 2 que murieron el 31/1 después de su tercera reproducción, luego $a_3 = 50 + 4.50 - 2 = 248$.
En diciembre del año 2004 las bacterias que hay en el recipiente son las que había a fines del 2003 más los 4 hijos de cada una de ellas que nacieron en enero de 2004 menos las

que murieron el 31/1 después de su tercera reproducción. Las bacterias que murieron el 31/1/2004 son aquellas que nacieron el 30/1/ 2001, es decir, los 4 hijos que tuvieron ese año cada una de las bacterias que había en diciembre de 2000. Luego $a_4 = 248 + 4.248 - 4.2$.
En diciembre del año 2005 las bacterias que hay en el recipiente son las que había a fines del 2004 más los 4 hijos de cada una de ellas que nacieron en enero de 2005 menos las que murieron el 31/1 después de su tercera reproducción. Las bacterias que murieron el 31/1/2005 son aquellas que nacieron el 30/1/ 2002, es decir, los 4 hijos que tuvieron ese año cada una de las bacterias que había en diciembre de 2001. Luego $a_5 = a_4 + 4a_4 - 4a_1$.
En general, para $n \geq 4$, las bacterias que hay en el recipiente en diciembre de $2000 + n$ son las que había a fines del $2000 + n - 1$ más los 4 hijos de cada una de ellas que nacieron en enero de $2000 + n$ menos las que murieron el 31/1 después de su tercera reproducción. Las bacterias que murieron el $31/1/2000 + n$ son aquellas que nacieron el $30/1/\ 2000 + n - 3$, es decir, los 4 hijos que tuvieron ese año cada una de las bacterias que había en diciembre de $2000 + n - 4$. Luego $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-1} - 4a_{n-4} = 5a_{n-1} - 4a_{n-4}$.
Luego se tiene que

$$a_0 = 2,\ a_1 = 10,\ a_2 = 50,\ a_3 = 248 \text{ y, para } n \geq 4,\ a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-4}$$

Probaremos que:

i) $a_n > a_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (cada año el recipiente contiene más bacterias de las que había el año anterior)
ii) $a_{n+2} > 4a_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (cada tres años la cantidad de bacterias al menos se cuadruplica)
iii) $a_n > n.3^{n+1}$ para todo $n \geq 3$ (la cantidad de bacterias en el recipiente después de varios años es enorme...)

Probemos i). $P(n) :\ a_n > a_{n-1}$

Es obvio que $P(1) :\ a_1 > a_0$ es verdadera pues $a_1 = 10$ y $a_0 = 2$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $P(k)$ es verdadera $\forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$, es decir, que $a_k > a_{k-1}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$. Debemos probar que $a_{n+1} > a_n$.

Si $n = 1$ entonces $a_{n+1} = 50 > 10 = a_1 = a_n$, si $n = 2$ entonces $a_{n+1} = 248 > 50 = a_2 = a_n$ y si $n \geq 3$ entonces $n + 1 \geq 4$ y por lo tanto

$$a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-3} = a_n + 4(a_n - a_{n-3}) > a_n$$

pues por hipótesis inductiva para $k = n$, $k = n - 1$ y $k = n - 2$, $a_n > a_{n-1}$, $a_{n-1} > a_{n-2}$ y $a_{n-2} > a_{n-3}$ de donde se deduce que $a_n - a_{n-3} > 0$.

Luego, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora probemos ii). $P(n) :\ a_{n+2} > 4a_{n-1}$

$P(1) :\ a_3 > 4a_0$ es verdadera pues $a_3 = 248$ y $a_0 = 2$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $P(n)$ es verdadera, es decir, que $a_{n+2} > 4a_{n-1}$. Debemos probar que $a_{n+3} > 4a_n$.
Como $n+3 \geq 4$ pues $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 4a_{n-1} = 4a_{n+2} + a_{n+2} - 4a_{n-1} > 4a_{n+2} > 4a_n$$

pues $a_{n+2} - 4a_{n-1} > 0$ por hipótesis inductiva y $a_{n+2} > a_{n+1} > a_n$ por i). Luego $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente probemos iii). Queremos ver que $a_n > n.3^{n+1}$ para todo $n \geq 3$. Esto es lo mismo que probar que $P(n) : a_{n+2} > (n+2).3^{n+3}$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

$P(1) : a_3 > 3.3^4$ es verdadera pues $a_3 = 248$ y $3.3^4 = 3.81 = 243$
Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $P(n)$ es verdadera, es decir, que $a_{n+2} > (n+2).3^{n+3}$. Debemos probar que $a_{n+3} > (n+3).3^{n+4}$.
Como $n+3 \geq 4$ pues $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 4a_{n-1} = 4a_{n+2} + (a_{n+2} - 4a_{n-1}) > 4a_{n+2} > 4(n+2).3^{n+3}$$

ya que $a_{n+2} - 4a_{n-1} > 0$ por ii) y $a_{n+2} > (n+2).3^{n+3}$ por hipótesis inductiva. Además, como $4n+8 \geq 3n+9$ pues $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$4(n+2).3^{n+3} = (4n+8).3^{n+3} \geq (3n+9).3^{n+3} = 3(n+3)3^{n+3} = (n+3)3^{n+4}$$

Por lo tanto $a_{n+3} > (n+3)3^{n+4}$ como queríamos probar. Luego, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

La sucesión de Fibonacci. Supongamos que cada pareja de conejos procrea otra pareja de conejos una vez al mes a partir de su segundo mes de vida. Si se adquiere una pareja de conejos recién nacidos en el mes 0 y nunca ninguno muere, ¿cuántas parejas de conejos habrá en el mes n?

Sea a_n la cantidad de parejas de conejos que hay en el mes n. Entonces $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ (la pareja que había en el mes 1, que ahora tiene 2 meses de vida, más sus hijos), $a_3 = 2+1 = 3$ (las dos parejas que había el mes 2 más los hijos de las parejas que en el mes 3 tienen al menos 2 meses de vida, que son los conejos que había en el mes 1), $a_4 = 3+2 = 5$ (las 3 parejas que había el mes 3 más los hijos de las parejas que en el mes 4 tienen al menos 2 meses de vida, que son los conejos que había en el mes 2).
En general, en el mes $n+1$ la cantidad de conejos será $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ (las a_n parejas que había el mes n más los hijos de las parejas que en el mes $n+1$ tienen al menos 2 meses de vida, que son los conejos que había en el mes $n-1$). Luego, a_n queda definida por

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Ejercicio. Probar que $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$