Conjuntos, relaciones y funciones

Susana Puddu

1. Repaso sobre la teoría de conjuntos.

Denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales y por $\mathbb{Z}$ al de los enteros.

Dados dos conjuntos A y B decimos que A *está contenido en* B o también que A *es un subconjunto de* B si cada elemento de A es también un elemento de B, es decir, si $x \in A \implies x \in B$. En tal caso escribimos $A \subseteq B$.
Decimos que los conjuntos A y B son *iguales* si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. En tal caso escribimos $A = B$. Decimos que A *está contenido estrictamente en* B si $A \subseteq B$ y $B \not\subseteq A$, es decir, si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. En ese caso escribimos $A \subset B$.

Ejemplos.

i) $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
En este caso $A \subseteq B$ pero no vale que $B \subseteq A$ pues $4 \in B$ y $4 \notin A$. Luego, A está contenido estrictamente en B.

ii) $A = \{a, b, \{3\}, 2\}$, $B = \{a, b, 3, 2\}$

En este caso $A \not\subseteq B$ pues $\{3\} \in A$ y $\{3\} \notin B$. Además, $B \not\subseteq A$ pues $3 \in B$ y $3 \notin A$.

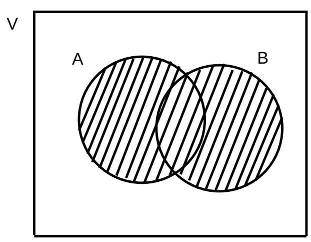
iii) $\emptyset \subseteq A$ cualquiera sea el conjunto A, donde $\emptyset$ denota el conjunto vacío.

iv) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, c, a\}$. En este caso $A = B$.

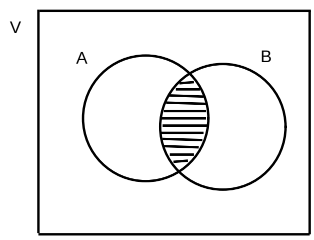
Operaciones con conjuntos. Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto dado V, al que llamaremos *conjunto referencial.* Definimos la unión, intersección, complemento, diferencia y diferencia simétrica de la siguiente manera:

$A \cup B = \{x \in V \,/\, x \in A \text{ o } x \in B\}$ (unión)
$A \cap B = \{x \in V \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\}$ (intersección)
$A' = \{x \in V \,/\, x \notin A\}$ (complemento respecto del conjunto referencial V)
$A - B = \{x \in V \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$ (diferencia)
$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ (diferencia simétrica)

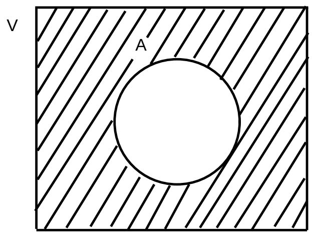
Grafiquemos estos conjuntos en un diagrama de Venn:



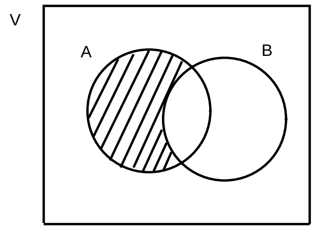
$A \cup B$



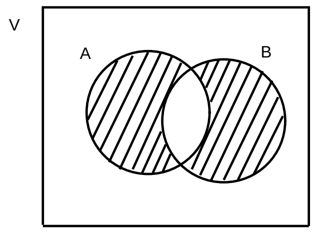
$A \cap B$



A'



$A - B$



$A \triangle B$

Observemos que, de estos conjuntos, el único que realmente depende del conjunto referencial V es A'. En general, cuando trabajemos con conjuntos, siempre supondremos que todos los conjuntos considerados son subconjuntos de un conjunto referencial y sólo aclararemos cuál es ese conjunto referencial cuando sea necesario.

Ejercicio. Probar que $A - B = A \cap B' = \{x \in A \,/\, x \notin B\}$.

Diremos que los conjuntos A y B son *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo. Dado el conjunto referencial $V = \{a, b, c, d, 2, \{2\}, 3, \{3\}, 7\}$ sean A, B y C los subconjuntos de V definidos por:

$$A = \{a, b, 2, \{3\}\} \qquad B = \{a, b, 2, 3\} \qquad C = \{2, 3, 7\}$$

se tiene que

$$A \cup B = \{a, b, 2, 3, \{3\}\}, \qquad A \cap B = \{a, b, 2\}, \qquad B - C = \{a, b\}$$

$$A \triangle C = \{a, b, \{3\}, 3, 7\}, \quad (A \cap B) - (A \triangle C) = \{2\}, \quad (A \cap B)' = \{c, d, \{2\}, \{3\}, 3, 7\}$$

Además, $B - C$ y $(A \cap B)'$ son disjuntos.

Ejercicio. Sean A, B y C los conjuntos del ejemplo anterior. Hallar todos los subconjuntos de $B \cup C$ que sean disjuntos con A.

Ejercicio. Sean $A = \{1, \emptyset, a, 7\}$ y $B = \{\{1\}, a, b, 4\}$, $C = \{3, 6, b, a\}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

i) $\emptyset \in A \cup B$
ii) $\emptyset \in A \cap B$
iii) $\emptyset \subseteq A$
iv) $\emptyset \subseteq C$
v) $7 \in (A \cup C) \cap (A \triangle B)$

Propiedades de las operaciones. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Entonces valen:

i) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ y $A \triangle B = B \triangle A$
ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ y $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$
iii) $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
iv) $A \subseteq B$ y $A \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq B \cap C$
v) $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$
vi) $A \subseteq C$ y $B \subseteq C \Longrightarrow A \cup B \subseteq C$
vii) $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$
viii) $(A')' = A$, $A \cap A' = \emptyset$ y $A \cup A' = V$
ix) $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
x) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
xi) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
xii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
xiii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración: Sólo demostraremos iv), vi), viii) y xi) y dejamos como ejercicio la demostración de las restantes propiedades.

Demostración de iv): Sabemos que $A \subseteq B$ y que $A \subseteq C$. Debemos probar que $A \subseteq B \cap C$: Sea $x \in A$. Como $A \subseteq B$ y $x \in A$ entonces $x \in B$ y como $A \subseteq C$ y $x \in A$ entonces $x \in C$. Luego resulta que $x \in B$ y $x \in C$, es decir, $x \in B \cap C$.

Demostración de vi): Sabemos que $A \subseteq C$ y que $B \subseteq C$. Debemos probar que $A \cup B \subseteq C$: Sea $x \in A \cup B$. Entonces $x \in A$ o $x \in B$.
Si $x \in A$ entonces, como $A \subseteq C$ resulta que $x \in C$. Si $x \in B$ entonces, como $B \subseteq C$ resulta que $x \in C$.
Hemos probado entonces que $x \in C$.

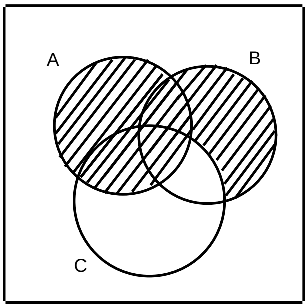
Demostración de viii): Sólo probaremos que $A \cap A' = \emptyset$ y dejamos el resto como ejercicio. Queremos ver que $\nexists\, x \,/\, x \in A \cap A'$. Supondremos que sí y llegaremos a una contradicción. Supongamos que existe $x \in A \cap A'$. Entonces $x \in A$ y $x \in A' = \{x \,/\, x \notin A\}$. Luego resultaría que $x \in A$ y $x \notin A$, lo que es una contradicción.

Demostración de xi): Debemos probar que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, es decir, que $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$

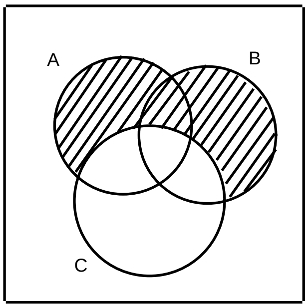
Primero probemos que $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Sea $x \in (A \cup B) \cap C$. Entonces $x \in A \cup B$ y $x \in C$. Luego, $x \in A$ o $x \in B$, y además $x \in C$. Entonces debemos examinar dos casos:
Si $x \in A$ entonces $x \in A$ y $x \in C$ de donde $x \in A \cap C$ y por lo tanto $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Si $x \in B$ entonces $x \in B$ y $x \in C$ de donde $x \in B \cap C$ y por lo tanto $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Luego, cualquiera sea el caso, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ como queríamos probar.

Ahora probemos que $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$. Por la propiedad v), $A \cap C \subseteq A$ y, por vii), $A \subseteq A \cup B$. Luego, usando iii) resulta que $A \cap C \subseteq A \cup B$.
Por otra parte, por v), $A \cap C \subseteq C$. Por lo tanto se tiene que $A \cap C \subseteq A \cup B$ y $A \cap C \subseteq C$. Ahora, usando iv) se tiene que $A \cap C \subseteq (A \cup B) \cap C$.
Análogamente se demuestra que $B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap C$. Luego, usando ahora la propiedad vi) resulta que $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$. □

Diagramas de Venn. Supongamos que queremos determinar si la siguiente afirmación es cierta:
Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C se verifica que $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
Graficamos ambos miembros de esa igualdad en un diagrama de Venn



$A \cup (B - C)$



$(A \cup B) - C$

Como se ve, los conjuntos no parecen ser iguales: el primero contiene los elementos que pertenecen a $A \cap C$ y el segundo no. Probemos entonces que la afirmación es falsa: debemos mostrar conjuntos A, B y C tales que $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - C$. Notar que de los diagramas se deduce que para lograr eso debemos elegir A, B y C de tal manera que $A \cap C$ no sea vacío. Por ejemplo, elegimos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5, 9, 0\}$ y $C = \{1, 4, 5\}$. Entonces $A \cup (B - C) = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 9, 0\} = \{1, 2, 3, 9, 0\}$ y $(A \cup B) - C = \{1, 2, 3, 5, 9, 0\} - \{1, 4, 5\} = \{2, 3, 9, 0\}$, y por lo tanto no son iguales.
Los diagramas de Venn nos ayudan a intuir si la afirmación es verdadera o no. Luego, si pensamos que es verdadera debemos dar una demostración y si sospechamos que es falsa exhibir un contraejemplo.

Conjunto de partes. Dado un conjunto A definimos el *conjunto de partes* de A como el conjunto

$$\mathcal{P}(A) = \{B \,/\, B \subseteq A\}$$

es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Ejemplo. Si $A = \{a, b, c\}$ entonces su conjunto de partes es

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

2. Lógica proposicional y su relación con la teoría de conjuntos.

Una *proposición* es una afirmación que sólo puede tomar dos valores de verdad: VERDADERA o FALSA. Por ejemplo, la afirmación "18 es divisible por 3" es una proposición. También lo son la afirmaciones "todos los números naturales son pares" y "no existe en el plano ninguna recta que pase por el origen". La primera proposición es verdadera, la segunda y la tercera son falsas.
Si p y q son proposiciones, podemos construír nuevas proposiciones a partir de ellas usando los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$, donde $\neg p$ es la negación de p. La proposición $p \wedge q$ es verdadera si y sólo si p y q lo son, la proposición $p \vee q$ es verdadera si y sólo si p es verdadera o q lo es y la proposición $\neg p$ es verdadera si y sólo si p es falsa. Por ejemplo, dadas las proposiciones p: 18 es divisible por 3, q: todos los números naturales son mayores que 7 y r: un número entero menor que 8 nunca es divisible por 11, entonces $p \wedge q$ es la proposición "18 es divisible por 3 y todos los números naturales son mayores que 7", $p \vee r$ es la proposición "18 es divisible por 3 o un número entero menor que 8 nunca es divisible por 11" y $\neg r$ es la proposición "existe un número entero menor que 8 que es divisible por 11". Además $p \wedge q$ es falsa pues q es falsa, $p \vee r$ es verdadera pues p es verdadera y $\neg r$ es verdadera pues r es falsa.
En resumen, los valores de verdad de $p \wedge q$, $p \vee q$ y $\neg p$ están dados por las tablas de verdad

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	$\neg p$
1	0
0	1

donde 1 significa VERDADERO y 0 significa FALSO
Una proposición importante es $\neg p \vee q$, veamos su tabla de verdad

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Observemos que $\neg p \vee q$ es verdadera cuando la validez de p implica la validez de q: para que sea verdadera $\neg p \vee q$ debe ocurrir que cuando p es verdadera entonces q también debe serlo (en cambio, cuando p es falsa, no importa si q es verdadera o no). Debido a esto decimos que p *implica* q cuando $\neg p \vee q$ es verdadera. En tal caso escribimos $p \Longrightarrow q$.
Otra proposición importante es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$, que es verdadera cuando $p \Longrightarrow q$ y $q \Longrightarrow p$. En tal caso decimos que p y q son *equivalentes* y escribimos $p \Longleftrightarrow q$. Dejamos como ejercicio verificar que su tabla de verdad es

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Luego, dos proposiciones son equivalentes cuando ambas son verdaderas o ambas son falsas. Dejamos como ejercicio demostrar que las proposiciones $p \Longrightarrow q$ y $\neg q \Longrightarrow \neg p$ son equivalentes.

Sea X un conjunto. Si para cada $x \in X$ tenemos una proposición $p(x)$ decimos que p es una función proposicional predicable sobre X. Por ejemplo, $p(n) : n(n+1) \leq 2^n$ es una función proposicional predicable sobre $\mathbb{N}$.

Si p y q son funciones proposicionales predicables sobre un conjunto V podemos considerar el subconjunto A de V cuyos elementos son los $x \in V$ tales que $p(x)$ es verdadera y el subconjunto B de V formado por los $x \in V$ tales que $q(x)$ es verdadera. Por ejemplo, si $V = \mathbb{R}$, dadas las funciones proposicionales $p(x) : x \leq \sqrt{2}$ y $q(x) : x^2 = x - 7$ entonces $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq \sqrt{2}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = x - 7\}$. En general se tiene que $A = \{x \in V \,/\, p(x)\}$ y $B = \{x \in V \,/\, q(x)\}$. Es fácil ver que:

i) $A \subseteq B$ si y sólo si $p(x) \Longrightarrow q(x)$ para todo $x \in V$

ii) $A = B$ si y sólo si $p(x) \Longleftrightarrow q(x)$ para todo $x \in V$

iii) $A \cap B = \{x \in V \,/\, p(x) \wedge q(x)\}$

iv) $A \cup B = \{x \in V \,/\, p(x) \vee q(x)\}$

v) $A' = \{x \in V \,/\, \neg p(x)\}$

Veamos ahora cómo podemos probar que $(A \cap B)' = A' \cup B'$, donde A y B son subconjuntos de un conjunto referencial V. Para cada $x \in V$ definimos las proposiciones $p(x) : x \in A$ y $q(x) : x \in B$. Entonces se tiene que $A = \{x \in V \,/\, p(x)\}$ y $B = \{x \in V \,/\, q(x)\}$.

Ahora, $(A \cap B)' = \{x \in V \,/\, \neg(p(x) \wedge q(x))\}$ y $A' \cup B' = \{x \in V \,/\, \neg p(x) \vee \neg q(x)\}$. Por lo tanto, para probar la igualdad de conjuntos nos basta mostrar que las proposiciones $\neg(p(x) \wedge q(x))$ y $\neg p(x) \wedge \neg q(x)$ son equivalentes.

Como dos proposiciones son equivalentes si tienen la misma tabla de verdad (cada una es verdadera si y sólo si la otra lo es), basta entonces hallar las tablas de verdad de cada una de estas proposiciones y ver que son iguales.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Esta es otra manera de probar las igualdades de conjuntos.

3. Relaciones.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos, definimos el *producto cartesiano* de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en la forma

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,/\, a_i \in A_i \ \forall i \ (1 \leq i \leq n)\}$$

En particular, si A y B son conjuntos, el producto cartesiano de A por B es

$$A \times B = \{(a, b) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 3, a\}$ entonces

$$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,a), (2,1), (2,3), (2,a)\}$$

Decimos que $\mathcal{R}$ es una *relación de A en B* si $\mathcal{R}$ es un subconjunto de $A \times B$. Decimos que $\mathcal{R}$ es una *relación en A* si $\mathcal{R}$ es una relación de A en A, es decir, un subconjunto de $A \times A$. Si $\mathcal{R}$ es una relación de A en B también escribiremos $a \,\mathcal{R}\, b$ en lugar de $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Ejemplos.

i) Sea $A = \mathbb{N}$ y sea $B = \{1, 2, -1, 0\}$. Las siguientes son relaciones de A en B:
a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 0), (2, -1)\}$
b) $\mathcal{R}_2 = \emptyset$
c) $\mathcal{R}_3 = \{(n, 2) \in \mathbb{N} \times B \,/\, n \text{ es impar}\}$
ii) $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, a + b \geq 0\}$ es una relación en $\mathbb{Z}$
iii) $\mathcal{R} = \{(n, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \,/\, 2n = a^2\}$ es una relación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$

Sea $\mathcal{R}$ una relación en un conjunto A. Decimos que $\mathcal{R}$ es

reflexiva sii $a \,\mathcal{R}\, a$ para todo $a \in A$
simétrica sii $a \,\mathcal{R}\, b \Longrightarrow b \,\mathcal{R}\, a$
antisimétrica sii $a \,\mathcal{R}\, b \wedge b \,\mathcal{R}\, a \Longrightarrow a = b$
transitiva sii $a \,\mathcal{R}\, b \wedge b \,\mathcal{R}\, c \Longrightarrow a \,\mathcal{R}\, c$

Ejemplo. Dado $A = \{1, 2, 3\}$, consideremos la relación en A

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,2)\}$$

Esta relación no es reflexiva: $(2, 2) \notin \mathcal{R}_1$.
Tampoco es simétrica: $(1, 2) \in \mathcal{R}_1$ pero $(2, 1) \notin \mathcal{R}_1$ ni es antisimétrica: $(3, 2) \in \mathcal{R}_1$ y $(2, 3) \in \mathcal{R}_1$ pero $2 \neq 3$.
Por último, no es transitiva: $(3, 2) \in \mathcal{R}_1$ y $(2, 3) \in \mathcal{R}_1$ pero $(3, 3) \notin \mathcal{R}_1$.

En cambio, si definimos en el mismo conjunto A la relación

$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

resulta que es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

Y si ahora consideramos en A la relación $\mathcal{R}_3 = \emptyset$, vemos que no es reflexiva, pero es simétrica, antisimétrica y transitiva. Dejamos como ejercicio verificar estas afirmaciones.

Finalmente, la relación $\mathcal{R}_4$ en A definida por

$$\mathcal{R}_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$$

es reflexiva, simétrica y transitiva pero no es antisimétrica.

Relaciones de orden y relaciones de equivalencia. Dada una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A decimos que
$\mathcal{R}$ es una relación *de orden* si y sólo si $\mathcal{R}$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
$\mathcal{R}$ es una relación *de equivalencia* si y sólo si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos.

i) La relación en $A = \mathbb{R}$ definida por $a\,\mathcal{R}\,b$ sii $a \leq b$ es una relación de orden.

ii) Cualquiera sea el conjunto A, la relación en A definida por $a\,\mathcal{R}\,b$ sii $a = b$ es una relación de equivalencia.

iii) Sea X un conjunto. La relación en $A = \mathcal{P}(X)$ definida por $A\,\mathcal{R}\,B$ sii $A \subseteq B$ es una relación de orden.

iv) En $A = \{1,2,3,4\}$. definimos las siguientes relaciones

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3)\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

Dejamos como ejercicio verificar que $\mathcal{R}_1$ es una relación de orden y $\mathcal{R}_2$ es una relación de equivalencia.

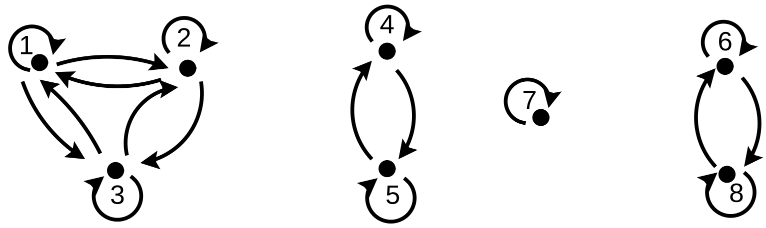
Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en un conjunto A. Si $a\,\mathcal{R}\,b$ decimos que a y b son equivalentes.

Ejercicio. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$.
i) Definir una relación de orden $\mathcal{R}$ en A tal que $(6,5) \in \mathcal{R}$ y $(1,5) \notin \mathcal{R}$
ii) Determinar si existe una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ tal que $(6,2) \in \mathcal{R}$, $(2,3) \in \mathcal{R}$ y $(3,6) \notin \mathcal{R}$. Justificar.
iii) Determinar si existe una relación de orden $\mathcal{R}$ tal que $(6,2) \in \mathcal{R}$, $(2,3) \in \mathcal{R}$ y $(3,6) \in \mathcal{R}$. Justificar.
iv) ¿Existe alguna relación de orden en A que sea también de equivalencia?

Relaciones de equivalencia y particiones. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Dada la relación de equivalencia en A

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 = \{&(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(1,2),(2,1),\\ &(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4),(6,8),(8,6)\}\end{aligned}$$

graficamos la relación poniendo un punto por cada elemento de A y una flecha de a a b para cada $a, b \in A$ tal que $(a, b) \in \mathcal{R}_1$.



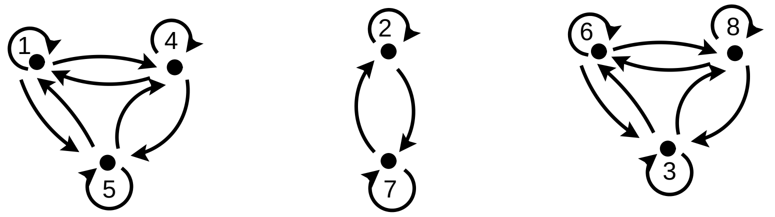
Como se observa en el gráfico, podemos partir al conjunto A en cuatro subconjuntos disjuntos dos a dos, no vacíos, cada uno de ellos formado por todos los elementos de A que están relacionados entre sí:

$$\{1,2,3\}, \quad \{4,5\}, \quad \{7\}, \quad \{6,8\}$$

Recíprocamente, dada la partición de A en los subconjuntos disjuntos dos a dos, no vacíos

$$\{1,4,5\}, \quad \{2,7\}, \quad \{3,6,8\}$$

poniendo ahora un punto por cada elemento de A y una flecha de a a b para los $a, b \in A$ que pertenecen a un mismo subconjunto se tiene



de donde obtenemos la relación de equivalencia

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 = &\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),\\ &(4,5),(5,4),(2,7),(7,2),(3,6),(6,3),(6,8),(8,6),(3,8),(8,3)\}\end{aligned}$$

Notemos además que si construímos la relación de equivalencia correspondiente a la partición

$$\{\{1,2,3\}, \quad \{4,5\}, \quad \{7\}, \quad \{6,8\}\}$$

volvemos a obtener la relación $\mathcal{R}_1$ y si construímos la partición correspondiente a $\mathcal{R}_2$ volvemos a obtener la partición

$$\{\{1,4,5\}, \quad \{2,7\}, \quad \{3,6,8\}\}$$

Es decir, estas construcciones son recíprocas. Para hacer esto en general, veamos cómo hallamos la partición de A usando $\mathcal{R}_1$: $\{1,2,3\}$ es el subconjunto de A formado por todos los elementos de A que son equivalentes a 1, $\{4,5\}$ es el subconjunto de A formado por todos los elementos de A que son equivalentes a 4, $\{7\}$ es el subconjunto de A formado por todos los elementos de A que son equivalentes a 7 y $\{6,8\}$ es el subconjunto de A formado por todos los elementos de A que son equivalentes a 6. Para cada $a \in A$ consideremos el subconjunto de todos los elementos de A que son equivalentes a a, $\mathcal{C}_a = \{b \in A \,/\, b\,\mathcal{R}_1\, a\}$, al que llamaremos *clase de equivalencia de* a. Entonces resulta que los conjuntos disjuntos dos a dos y no vacíos que forman la partición de A son las clases de equivalencia de los elementos 1, 4, 7 y 6. $\{1,2,3\} = \mathcal{C}_1$, $\{4,5\} = \mathcal{C}_4$, $\{7\} = \mathcal{C}_7$ y $\{6,8\} = \mathcal{C}_6$.

Notar que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_5$ y $\mathcal{C}_6 = \mathcal{C}_8$. Esto se debe a que $\mathcal{R}_1$ es una relación de equivalencia. En general, si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en un conjunto A entonces se verifican:
i) $a \in \mathcal{C}_a$ para todo $a \in A$
ii) $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$ si y sólo si $(a,b) \in \mathcal{R}$
iii) $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b = \emptyset$ si y sólo si $(a,b) \notin \mathcal{R}$
Probaremos esto más adelante.

Recíprocamente, dada la partición $\{\{1,4,5\}, \quad \{2,7\}, \quad \{3,6,8\}\}$ habíamos construído la relación de equivalencia

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 =\{&(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),\\ &(4,5),(5,4),(2,7),(7,2),(3,6),(6,3),(6,8),(8,6),(3,8),(8,3)\}\end{aligned}$$

Notemos que esta relación $\mathcal{R}_2$ queda definida por

$$(a,b) \in \mathcal{R}_2 \quad \text{si y sólo si} \quad a \text{ y } b \text{ pertenecen al mismo subconjunto de la partición}$$

En un momento veremos que la relación así obtenida es de equivalencia pues los conjuntos que forman la partición son disjuntos dos a dos, no vacíos y su unión es A.

Veamos ahora el caso general, pero primero definamos el concepto de partición: sea A un conjunto y sea $\mathcal{P}$ un conjunto formado por subconjuntos de A. Decimos que $\mathcal{P}$ es una *partición* de A si se verifican:

1) $P \neq \emptyset$ para todo $P \in \mathcal{P}$ (los elementos de la partición son no vacíos)
2) Dados $P, Q \in \mathcal{P}$, si $P \neq Q$ entonces $P \cap Q = \emptyset$ (dos elementos distintos de la partición son disjuntos)
3) $\forall a \in A \;\exists\, P \in \mathcal{P} \,/\, a \in P$ (todo elemento de A pertenece a algún elemento de la partición o, lo que es lo mismo, A es la unión de todos los elementos de la partición)

Ejemplo. Sea $A = \{1,2,3,4,5,a,b,c,d\}$. Entonces

$$\mathcal{P} = \{\{1,a,c\},\ \{2,3,4,5\},\ \{b,d\}\}$$

es una partición de A pero no son particiones de A

$$\{\{5, b, c\},\ \{2, 3, 4, 1\},\ \{d\}\} \quad \text{ni} \quad \{\{1, a, c\},\ \{2, 3, 4, 5\},\ \{b, d, 1\}\}$$

pues en el primer caso no se verifica 3) y en el segundo no se verifica 2).
Importante: no confundir el concepto de partición de un conjunto A con el conjunto de partes de A.

Cuando una relación es de equivalencia también suele denotársela por $\simeq$ en lugar de $\mathcal{R}$.
Sea $\simeq$ una relación de equivalencia en un conjunto A. Definimos la *clase de equivalencia* de a como el subconjunto de A formado por todos los elementos que son equivalentes a a:

$$\mathcal{C}_a = \{b \in A \,/\, b \,\simeq\, a\}$$

A veces diremos simplemente la *clase* de a en lugar de la clase de equivalencia de a.

Ejemplo. Consideremos la relación $\simeq$ en $\mathbb{Z}$ definida por $a \simeq b$ si y sólo si $b-a$ es divisible por 4. Dejamos como ejercicio verificar que es una relación de equivalencia. En este caso hay 4 clases de equivalencia:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_0 &= \{a \in \mathbb{Z} \,/\, a = 4k \,/\ \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\} \\
\mathcal{C}_1 &= \{a \in \mathbb{Z} \,/\, a = 4k+1 \,/\ \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\} \\
\mathcal{C}_2 &= \{a \in \mathbb{Z} \,/\, a = 4k+2 \,/\ \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\} \\
\mathcal{C}_3 &= \{a \in \mathbb{Z} \,/\, a = 4k+3 \,/\ \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Es fácil verificar que la clase de equivalencia de cualquier $a \in \mathbb{Z}$ es igual a alguna de éstas.

Ejercicio. Sea $\simeq$ la relación de equivalencia en el conjunto de matrices de $n \times n$ con coeficientes 0 y 1 definida por

$$A \,\simeq\, B \text{ si y sólo si } A \text{ y } B \text{ tienen la misma cantidad de unos}$$

i) Determinar cuántas clases de equivalencia distintas hay.
ii) Para $n = 3$, determinar la clase de equivalencia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Proposición. Sea $\simeq$ una relación de equivalencia en un conjunto A. Entonces se verifican:
i) $a \in \mathcal{C}_a$ para todo $a \in A$
ii) $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$ si y sólo si $a \simeq b$
iii) $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b = \emptyset$ si y sólo si $a \,\not\simeq\, b$

Demostración: i) Sea $a \in A$. Como $\simeq$ es reflexiva entonces $a \simeq a$. Luego, $a \in \mathcal{C}_a$.
ii) ($\Longrightarrow$) Si $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$, como $a \in \mathcal{C}_a$ por i), entonces $a \in \mathcal{C}_b$ de donde $a \simeq b$.
ii) ($\Longleftarrow$) Supongamos que $a \simeq b$. Debemos probar que $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$:
$\subseteq$: Si $c \in \mathcal{C}_a$ entonces $c \simeq a$ y como $a \simeq b$ y $\simeq$ es transitiva entonces $c \simeq b$ de donde $c \in \mathcal{C}_b$

$\supseteq$: Si $c \in \mathcal{C}_b$ entonces $c \simeq b$. Como $a \simeq b$ y $\simeq$ es simétrica entonces $b \simeq a$. Luego, $c \simeq b$ y $b \simeq a$. Usando ahora la transitividad resulta que $c \simeq a$ de donde $c \in \mathcal{C}_a$.

iii) ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b = \emptyset$. Queremos ver que $a \not\simeq b$. Supongamos que sí, entonces por ii) se tiene que $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$ de donde $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b = \emptyset$ lo cual contradice i).
iii) ($\Longleftarrow$) Supongamos que $a \not\simeq b$. Queremos ver que $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b = \emptyset$. Supongamos que no, entonces sea $c \in \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b$. Luego, $c \simeq a$ y $c \simeq b$ pero esto implica, usando ii), que $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_a$ y $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_b$. Por lo tanto, $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$ de donde por ii) nuevamente resulta que $a \simeq b$, una contradicción. $\square$

Ejercicio. Sea $\simeq$ una relación de equivalencia en un conjunto A y sean $a, b \in A$. Probar que $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b \neq \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$

Corolario. Sea $\simeq$ una relación de equivalencia en un conjunto A y sean $a, b \in A$. Entonces $a \simeq b$ si y sólo si $\exists c \in A \,/\, a, b \in \mathcal{C}_c$

Demostración: ($\Longrightarrow$) Si $a \simeq b$ entonces $a \in \mathcal{C}_b$. Además, por i) de la proposición se tiene que $b \in \mathcal{C}_b$ de donde $a, b \in \mathcal{C}_b$
($\Longleftarrow$) Si $a, b \in \mathcal{C}_c$ para algún $c \in A$ entonces, por i), $a \in \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_c$ y por lo tanto $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_c \neq \emptyset$. Entonces, por el ejercicio anterior, $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_c$. Del mismo modo se ve que $\mathcal{C}_b = \mathcal{C}_c$. Luego $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b$ de donde, por ii) de la proposición, resulta que $a \simeq b$ $\square$

Teorema. Sea A un conjunto. Se verifican:

i) Si $\simeq$ es una relación de equivalencia en A entonces $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_a \,/\, a \in A\}$ es una partición de A.
ii) Si $\mathcal{P}$ es una partición de A entonces la relación $\simeq$ en A definida por

$$a \simeq b \text{ si y sólo si } \exists P \in \mathcal{P} \,/\, a, b \in P\}$$

es de equivalencia.
iii) Las construcciones precedentes son recíprocas.

Demostración: i) Sea $\simeq$ una relación de equivalencia en A. Veamos que $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_a \,/\, a \in A\}$ es una partición de A. Para ello debemos ver que se cumplen los ítems 1), 2) y 3) de la definición de partición.
1) Cada elemento de la partición es no vacío pues, por la proposición anterior, parte i), se tiene que $a \in \mathcal{C}_a$ para todo $a \in A$
2) Dos elementos distintos de la partición son disjuntos ya que si $\mathcal{C}_a \neq \mathcal{C}_b$ entonces, por la proposición anterior, parte ii), $a \not\simeq b$ de donde resulta, por iii), que $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b = \emptyset$
3) Todo elemento de A pertenece a algún elemento de la partición porque, por i) de la proposición, dado $a \in A$ se tiene que $a \in \mathcal{C}_a$

ii) Sea $\mathcal{P}$ una partición de A. Debemos probar que la relación $\simeq$ en A definida por

$$a \simeq b \text{ si y sólo si } \exists P \in \mathcal{P} \,/\, a, b \in P\}$$

es de equivalencia.
$\simeq$ es reflexiva pues dado $a \in A$, como todo elemento de A pertenece a algún elemento de la partición, se tiene que $\exists P \in \mathcal{P} \,/\, a \in P$. Luego, $a \simeq a$
Es obvio que $\simeq$ es simétrica. Veamos que es transitiva. Sean $a, b, c \in A$ tales que $a \simeq b$ y $b \simeq c$. Entonces $\exists P \in \mathcal{P} \,/\, a, b \in P$ y $\exists Q \in \mathcal{P} \,/\, b, c \in Q$. Si fuese $P \neq Q$ entonces se tendría que $P \cap Q = \emptyset$ ya que dos elementos distintos de la partición deben ser disjuntos. Pero eso no ocurre pues $b \in P \cap Q$, por lo tanto debe ser $P = Q$ de donde resulta que $a, c \in P$ y por lo tanto $a \simeq c$

iii) Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A y sea $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_c \,/\, c \in A\}$ la partición de A construída a partir de $\mathcal{R}$. Si ahora definimos la relación $\mathcal{R}'$ correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ en la forma

$$(a, b) \in \mathcal{R}' \text{ si y sólo si } \exists P \in \mathcal{P} \,/\, a, b \in P\}$$

debemos ver que $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$, es decir, que $(a, b) \in \mathcal{R}$ si y sólo si $(a, b) \in \mathcal{R}'$:
Por el corolario, $(a, b) \in \mathcal{R} \iff \exists c \in A \,/\, a, b \in \mathcal{C}_c \iff \exists P \in \mathcal{P} \,/\, a, b \in P \iff (a, b) \in \mathcal{R}'$

Finalmente, sea $\mathcal{P}$ una partición cualquiera de A y sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia en A definida por

$$(a, b) \in \mathcal{R} \text{ si y sólo si } \exists P \in \mathcal{P} \,/\, a, b \in P\}$$

Si ahora construímos la partición de A correspondiente a la relación $\mathcal{R}$

$$\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_c \,/\, c \in A\}$$

donde $\mathcal{C}_c = \{b \in A \,/\, b \,\mathcal{R}\, c\}$, debemos probar que $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$. Para ello utilizaremos el siguiente resultado

Afirmación: Si $P \in \mathcal{P}$ y $a \in P$ entonces $P = \mathcal{C}_a$.

Demostremos esta afirmación: Sea $P \in \mathcal{P}$ y sea $a \in P$. Debemos probar que $P = \mathcal{C}_a$. Para ello veamos las dos inclusiones:
$\subseteq$: si $b \in P$ entonces, como $a \in P$, entonces $b, a \in P$. Luego, $(b, a) \in \mathcal{R}$ y por lo tanto $b \in \mathcal{C}_a$
$\supseteq$: Si $b \in \mathcal{C}_a$ entonces $(b, a) \in \mathcal{R}$. Luego $\exists Q \in \mathcal{P} \,/\, b, a \in Q$ y como $a \in P \cap Q$ entonces resulta que $P \cap Q \neq \emptyset$. Pero $\mathcal{P}$ es una partición de A, por lo tanto debe ser $P = Q$. Luego, $b \in P$.

Ahora finalmente probemos que $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$:

$\subseteq$: sea $P \in \mathcal{P}$ y sea $a \in P$ (existe a pues $P \neq \emptyset$). Luego, por la afirmación, $P = \mathcal{C}_a$ y por lo tanto $P \in \mathcal{P}'$.
$\supseteq$: sea $\mathcal{C}_a \in \mathcal{P}'$. Como $a \in A$ y $\mathcal{P}$ es una partición de A entonces existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $a \in P$. Luego, por la afirmación, $P = \mathcal{C}_a$ y por lo tanto $\mathcal{C}_a \in \mathcal{P}$ □

4. Repaso sobre funciones.

Sean A y B conjuntos. Diremos que una relación f de A en B es una *función* si para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Escribiremos $f : A \longrightarrow B$ para indicar que f es una función de A en B y denotaremos por $f(a)$ al único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.
Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ son funciones entonces $f = g$ si y sólo si $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.
Si $f : A \longrightarrow B$ es una función llamaremos *imagen de* f al subconjunto de B definido por

$$Im\,(f) = \{b \in B \,/\, f(a) = b \text{ para algún } a \in A\}$$

Si $f : A \longrightarrow B$ es una función y S es un subconjunto de B denotaremos por $f^{-1}(S)$ al subconjunto de A

$$f^{-1}(S) = \{a \in A \,/\, f(a) \in S\}$$

Ejemplos.

i) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{0, 2, 6\}$. Entonces $f_1 = \{(1, 0), (2, 2), (3, 6)\}$ no es una función pues $\nexists b \in B$ tal que $(4, b) \in f_1$
$f_2 = \{(1, 0), (2, 0), (3, 2), (4, 6), (1, 2)\}$ no es una función pues $(1, 0) \in f_2$ y $(1, 2) \in f_2$
$f_3 = \{(1, 0), (2, 0), (3, 6), (4, 0)\}$ es una función. En este caso se tiene que $f_3(1) = 0$, $f_3(2) = 0$, $f_3(3) = 6$, $f_3(4) = 0$ y la imagen de f_3 es $Im\,(f_3) = \{0, 6\}$.

ii) Sean $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{R}$. Entonces $f = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \,/\, a - 4b = 3\}$ es la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(a) = \frac{a-3}{4}$. En este caso

$$Im\,(f) = \{\frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots\}$$

iii) Si A es un conjunto, $i_A : A \longrightarrow A$, $i_A(a) = a$ es una función, llamada la *función identidad* del conjunto A, y su imagen es A.

iv) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Entonces $Im\,(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $f^{-1}(\{3, 16, -2\}) = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 4, -4\}$.

Diremos que una función $f : A \longrightarrow B$ es

inyectiva si vale: $f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'$
suryectiva o *sobreyectiva* si $\forall b \in B\ \exists a \in A \,/\, f(a) = b$ (es decir, si $Im\,(f) = B$)
biyectiva si $\forall b \in B\ \exists!\, a \in A \,/\, f(a) = b$ (es decir, si es inyectiva y suryectiva)

Ejemplos. i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
Esta función no es inyectiva pues $f(2) = f(-2)$. Tampoco es suryectiva pues $-5 \notin Im\,(f)$

ii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$
Esta función es inyectiva: $f(n) = f(m) \implies n^2 = m^2 \implies n = m$ o $n = -m$. Pero como $n, m > 0$ entonces debe ser $n = m$

Esta función no es suryectiva pues $3 \notin Im\,(f)$.

iii) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} 7 & \text{si } n = 1 \\ n-1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

Esta función no es inyectiva pues $f(8) = f(1)$. Veamos que es suryectiva: dado $m \in \mathbb{N}$, sea $n = m+1$. Luego $n \in \mathbb{N}$ y, como $n \geq 2$ pues $m \in \mathbb{N}$, entonces $f(n) = n-1 = m$

Composición de funciones. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, definimos la *composición* de g con f como la función $g \circ f : A \longrightarrow C$, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

Ejercicio. Probar que si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$ son funciones entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Función inversa. Dada una función $f : A \longrightarrow B$ decimos que f es *inversible* si existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = i_A$ y $f \circ g = i_B$. En tal caso g es única, se llama la *función inversa* de f y se denota por f^{-1}. Además, si $g = f^{-1}$ entonces $f = g^{-1}$.

Proposición. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Entonces f es inversible si y sólo si f es biyectiva.

Demostración: ($\Longrightarrow$) Sea f^{-1} la función inversa de f. Veamos que f es inyectiva y sobreyectiva.
f es inyectiva: Supongamos que $f(a) = f(a')$. Entonces

$$a = i_A(a) = (f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(a')) = (f^{-1} \circ f)(a') = i_A(a') = a'$$

Luego, $a = a'$.
f es sobreyectiva: Sea $b \in B$. Debemos hallar $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
Sea $a = f^{-1}(b) \in A$. Entonces $f(a) = f(f^{-1}(b)) = (f \circ f^{-1})(b) = i_B(b) = b$.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que f es biyectiva. Entonces, para cada $b \in B$ existe un único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Definimos $g : B \longrightarrow A$ en la forma:

$$g(b) = a \text{ si y sólo si } a \text{ es el único elemento de } A \text{ tal que } f(a) = b$$

Dejamos como ejercicio probar que la función g así definida es la inversa de f. □

Ejemplo. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 1$ es biyectiva. Encontremos su inversa: dado $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ es el único x tal que $f(x) = y$. Como

$$f(x) = y \Longleftrightarrow 2x^3 - 1 = y \Longleftrightarrow 2x^3 = y + 1 \Longleftrightarrow x^3 = \frac{y+1}{2} \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}$$

entonces la función inversa de f es

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+1}{2}}$$

Ejercicio. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determinar si f es biyectiva y en tal caso calcular su inversa.