Modelo Lineal

Ejercicio 1 La cantidad de una cierta sustancia química generada en un proceso depende de la temperatura a la que se expone dicha sustancia y de un error de medición aleatorio con media cero. Mas aún, se sabe que si $Y_i =$ cantidad de sustancia química en el i-ésimo experimento y $T_i =$ temperatura en el í-ésimo experimento, entonces, se verifica el siguiente modelo:

$$Y_i = \begin{cases} \epsilon_i & T_i < 20 \\ \beta_1(T_i - 20) + \epsilon_i & 20 \leq T_i < 100 \\ \beta_1 80 + \beta_2(T_i - 100) + \epsilon_i & T_i > 100 \end{cases}$$

Supongamos que se obtuvieron los siguientes datos experimentales:

$T_1 = 40$, $Y_1 = 57$, $T_2 = 80$, $Y_2 = 176$, $T_3 = 120$, $Y_3 = 223$, $T_4 = 180$, $Y_4 = 161$, $T_5 = 240$, $Y_5 = 99$,

donde la temperatura se fijo a priori.

a) reescribir el modelo en términos de modelo lineal, y hallar los estimadores de mínimos cuadrados para los parámetros usando la computadora.

b) Predecir de alguna manera la cantidad de sustancia que tendría si el proceso se hiciera a T=89.

Ejercicio 2 Supongamos que tenemos un fenómeno representado por una función $\{Y(t) : t \in I,\}$ donde I es un intervalo de la recta real, y que $Y(t)$ es la superposición de una ley determinística representada por un polinomio de grado p en la variable t y ciertas fluctuaciones aleatorias. Suponemos que tenemos observaciones efectuadas en tiempos fijos y conocidos t_i, (t_i, Y_i) $i = 1 \ldots n$. Entonces nuestro modelo es

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 t_i + \beta_2 t_i^2 \ldots \beta_p t_i^p + \epsilon_i \qquad (*)$$

a) Escribir un programa en la computadora que dados p y (t_i, Y_i) $i = 1 \ldots n.$ nos devuelva el estimador de mínimos cuadrados de los parámetros del modelo (*).

b) Generar variables aleatorias que sigan el modelo (*) en la computadora y probar el programa construido en el item anterior.