Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 10: Conjuntos Computables

En cada ejercicio, buscar una solución que utilice el teorema de Rice y otra que no lo utilice, cuando sea posible.

1. Probar que el conjunto $\{x \in \mathbb{N} : \text{dominio de } \psi_x = \emptyset\}$ no es recursivo.

2. Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \in \text{ rango de } \psi_x\}$.
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \psi_x = \psi_y\}$.
   c) $\{x \in \mathbb{N} : \text{ rango de } \psi_x \text{ es infinito}\}$.

3. Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un subconjunto recursivo infinito.

4. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   a) Si B es recursivamente enumerable, entonces B es recursivo o $\mathbb{N} \setminus B$ es recursivo.
   b) Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos recursivamente enumerables, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es recursivamente enumerable.

5. Probar que si K es recursivamente enumerable pero no recursivo, entonces $\overline{K}$ no es recursivamente enumerable.

6. Probar que si B es recursivamente enumerable y f es una función parcialmente computable entonces $f^{-1}(B)$ es recursivamente enumerable.

7. Probar que las siguientes funciones no son computables.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_{x,x} = 2x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si Dom } \Psi_{x} = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_{x} = \Psi_{y} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si imagen } \Psi_{x} \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in \text{Dom } \Psi_{x} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

8. Decidir si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:

   a) $\{x \in \mathbb{N} : \psi_x(0) \downarrow\}$.

   b) $\{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) \downarrow\}$.

   c) $\{x \in \mathbb{N} : \text{ dominio de } \psi_x = \emptyset\}$.

9. Probar que B es recursivamente enumerable e infinito si y sólo si existe una función $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva y recursiva tal que el rango f es B.

10. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \in \text{Dom } \psi_x\}$ es recursivamente enumerable, pero no es recursivo.

11. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) \text{ se puede computar en menos de } x \text{ pasos}\}$ es recursivo.

12. Probar que $B = \{x \in \mathbb{N} : \text{ el programa con índice } x \text{ tiene menos de } x \text{ líneas}\}$ es recursivo.

13. El conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) = 0\}$ ¿es recursivo?

14. El conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} : \psi_x(x) < x\}$ ¿es recursivo?