

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 9: Teoría de Computabilidad

1. Probar que una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es recursiva si y sólo si la función característica de su gráfico es recursiva, es decir la función dada por la siguiente fórmula:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = f(x) \\ 0 & \text{si } y \neq f(x) \end{cases}$$

2. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función recursiva y suryectiva. Probar que existe una función recursiva e inyectiva $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(f(x)) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}$.
3. Probar que las siguientes funciones son parcialmente computables:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \Phi(x, x) + 1 & \text{si } \Phi(x, x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi(x, x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Probar que existe una función recursiva primitiva $g(u, v, w)$ tal que $\Phi^{(3)}(u, v, w, z) = \Phi_{g(u, v, w)}(z)$. *Sugerencia:* observar la demostración del teorema del parámetro.
5. a) Sea f la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que f es parcialmente computable y que existe una función recursiva primitiva h de una variable tal que $f(x, y) = \psi_{h(x)}(y)$.

- b) Probar que $\psi_{h(x)}$ es una función constante si y sólo si $\psi_x(x)$ está definida.
- c) Probar que el conjunto de los números naturales x tales que ψ_x es constante no es recursivo.
6. Sea $\overline{Halt}(x, y) = 1$ si el programa de código y con input x nunca termina, o 0 en caso contrario. Probar que $\overline{Halt}(x, y)$ no es computable.
7. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función computable biyectiva. Probar que $Halt(f(x), x)$ no es computable. Sugerencia, considere la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(x, f^{-1}(x)) \uparrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8. Probar o refutar: si $f(x_1, \dots, x_n)$ es una función total para la cual existe una constante k tal que $f(x_1, \dots, x_n) \leq k$ para todo $x_1, \dots, x_n$, entonces f es computable.
9. Sea $Halt^1(x) = 1 \Leftrightarrow Halt(l(x), r(x)) = 1$ Probar que $Halt^1(x)$ no es computable.
10. a) Probar que $Halt(0, x)$ no es computable.
b) ¿Es computable $Halt(x, 0)$?
11. a) Probar que $Halt(x, x)$ no es computable.
b) Probar que $Halt(x + 1, x)$ no es computable.
12. Sea f una función parcialmente computable. Decidir si la siguiente función es parcialmente computable:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Dom f \\ \uparrow & \text{si } x \notin Dom f \end{cases}$$

13. Probar que la siguiente función no es parcialmente computable:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ está en la imagen de } \psi_x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

14. Decimos que una función parcialmente computable f es *extensible* si existe una función g computable tal que $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio de f . Probar que existe una función parcialmente computable que no es extensible.

15. Probar que hay funciones parcialmente computables g de una variable para las cuales la función f definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) = y \\ 0 & \text{si } g(x) \neq y \end{cases}$$

no es computable. ¿Qué podría decir de f cuando g es total y computable?