

# Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2013

## Práctica 7: Funciones Computables

1. Escribir en  $S$  programas para calcular las siguientes funciones aritméticas:

a) Producto:  $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ . (Usando suma como macro).

b) Potencia:  $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ . (Usando producto como macro).

2. Probar que  $S$  computa la función vacía  $\emptyset : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ .

3. Escribir en  $S$  programas para calcular las siguientes funciones de decisión:

a)

$$igual(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

b)

$$distinto(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 = x_2 \end{cases}$$

c)

$$mayor(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 > x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \leq x_2 \end{cases}$$

d)

$$menor(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 \geq x_2 \end{cases}$$

4. Escribir en  $S$  programas para calcular:

- a) El mínimo entre dos naturales dados.
- b) El máximo entre dos naturales dados.
- c) El máximo entre tres naturales dados.

5. Demostrar que el lenguaje  $S$  cumple las siguientes propiedades:

**Propiedad 1:**

- a) Computa la función  $suc: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $suc(x) = x + 1$ .
- b) Computa las proyecciones  $P_i^n: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ .
- c) Computa las constantes  $C_k^n: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Propiedad 2:** Si  $S$  computa  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  y computa  $g_i: \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , entonces  $S$  computa la composición:

$$h(x_1, \dots, x_r) = f(g_1(x_1, \dots, x_r), \dots, g_k(x_1, \dots, x_r)).$$

**Propiedad 3:** Computa la función de decisión  $d: \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{N}$ :

$$d(x, y, s, t) = \begin{cases} s & \text{si } x = y \\ t & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

6. Escribir un programa que compute la función:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ \uparrow & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

7. Sea  $f(x)$  el mayor número natural  $n$  tal que  $2 \cdot n \leq x$ . Escribir un programa que compute  $f$ .

8. Sea  $[r]$  la parte entera del número real  $r$ . Escribir un programa que compute la función:

$$\text{a) } f(x) = [\sqrt{x}] \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} [\log_2 x] & \text{si } x \neq 0 \\ \uparrow & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

9. Escribir un programa que dado un número natural compute su última cifra, y otro que dado un número natural compute su primera cifra.

10. Dada una función computable  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , escribir un programa que compute la función  $g$  definida como

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = 1 \\ \uparrow & \text{si } f(x) \neq 1 \end{cases}$$

11. Dada una función computable  $g$ , indicar si es posible escribir un programa que compute la función siguiente

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{si } g(x) \uparrow \end{cases}$$

12. Dado un número  $x$  se define la sucesión  $a_n$  de la siguiente manera:

$$a_1 = x, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es impar} \\ a_n/2 & \text{si } a_n \text{ es par} \end{cases}$$

Escribir un programa que compute la función  $f(n)$  que calcula el primer valor de  $n$  en el que  $a_n = 1$ . ¿Es verdad que  $f(n) \leq n$ ?

13. Repetir el ejercicio definiendo

$$a_1 = x, \quad a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es impar} \\ a_n/2 & \text{si } a_n \text{ es par} \end{cases}$$

¿Es verdad que  $f(n) \leq n$ ?

14. Escribir un programa que compute la función que al par de números  $x, y$  le asigna el menor valor de  $n$  tal que las últimas tres cifras de  $x^n$  son  $y$ , si  $y$  tiene hasta tres cifras. Si  $y$  tiene más de tres cifras o no hay ninguna potencia como la pedida, entonces el programa no termina. ¿Es posible analizar cuáles son los valores de  $x, y$  que hacen que el programa no termine?