Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 5: Cálculo de Predicados

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado binario P, dos símbolos de función f_1, f_2, donde f_1 es unario y f_2 es binario, y un símbolo de constante c. Decidir cuáles de las siguientes expresiones del lenguaje $\mathcal{L}$ son términos y cuáles son fórmulas, donde x, y denotan variables.

   a) $\exists f_2(x)\, P(f_2(x))$.
   b) $f_2(f_1(x), f_1(y))$.
   c) $\forall x \exists c P(x, c)$.
   d) $\forall c \exists x P(x, c)$
   e) $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$.
   f) $\exists x P(x, y) \forall y$.

2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario P. En cada una de las siguientes fórmulas, encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables de dichas fórmulas.

   a) $\forall x \exists y P(x, x)$.
   b) $(\exists x P(y, y) \rightarrow \exists y P(y, z))$.
   c) $\exists x (\exists y P(x, x) \wedge P(x, y))$.
   d) $\forall z (\forall x P(x, y) \vee P(x, z))$.

3. Para cada uno de los siguientes lenguajes, en donde f es unario y g binario, decidir si son interpretaciones de dichos lenguajes los siguientes ejemplos

   a) $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbf{N}, f_I(n) = \sqrt{n}, g_I(n, m) = n + m$.

   b) $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}, f_I(n) = n^2, g_I(n, m) = n + m$, $c_I = 2$.

   c) $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$, $c_I = d_I = 0$

$$\begin{aligned} f_I(n) &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases} \\ g_I(n, n) &= n^2 - n \end{aligned}$$

4. En cada uno de los siguientes ejemplos, describir en castellano la propiedad que determinan los siguientes enunciados (del modo más sencillo posible).

   a) $\forall x \forall y \left(P\left(x,y\right) \to \exists z \left(\left(Q\left(z\right) \wedge P\left(x,z\right)\right) \wedge P\left(z,y\right)\right)\right)$,
   donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I =<$, $Q_I\left(x\right)$ significa x es un número racional.

   b) $\forall x \left(Q\left(x\right) \to \exists y \left(R\left(y\right) \wedge P\left(y,x\right)\right)\right)$,
   donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I\left(x,y\right)$ significa x nace en el día y, $Q_I\left(x\right)$ significa x es un día, y $R_I\left(x\right)$ significa x es un esclavo.

   c) $\forall x \forall y \left(Q\left(x\right) \wedge Q\left(y\right)\right) \to P\left(f\left(x,y\right)\right)$,
   donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I\left(x\right)$ significa x es par, $P_I\left(x\right)$ significa x es impar, y $f_I\left(x,y\right) = x+y$.

5. Describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados, en los cuales el universo de la interpretación es el conjunto de la gente, donde P es un símbolo de predicado binario, tal que $P_I\left(x,y\right)$ significa x quiere a y.

   a) $\exists x \forall y P\left(x,y\right)$ b) $\forall y \exists x P\left(x,y\right)$

   c) $\exists x \exists y \left(\forall z P\left(y,z\right) \to P\left(x,y\right)\right)$ d) $\exists x \forall y \neg P\left(x,y\right)$

6. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste de un símbolo de función binario f y una constante c. Para cada una de las siguientes interpretaciones

   - $U_I = \mathbb{N}$, $f_I\left(x,y\right) = x+y$, $c_I = 1$
   - $U_I = \mathbb{N}$, $f_I\left(x,y\right) = x \cdot y$, $c_I = 0$

   escribir en el idioma castellano la propiedad que determinan los siguientes enunciados y analizar la veracidad o falsedad de los mismos.

   a) $\forall x \exists y \left(x = f\left(y,y\right) \vee x = f\left(f\left(y,y\right),c\right)\right)$

   b) $\exists y \forall x \left(x = f\left(y,y\right) \vee x = f\left(f\left(y,y\right),c\right)\right)$

   c) $\forall x \forall y \left(f\left(x,y\right) = c \to \left(x = c \vee y = c\right)\right)$,

7. Traducir las siguientes expresiones del castellano en enunciados de primer orden (utilizando símbolos de función, de predicados, conectivos y cuantificadores en forma razonable):

   a) No todas las aves pueden volar.
   b) Todas las aves, excepto los pingüinos, pueden volar.
   c) Ningún político es honesto.
   d) Ivanoff odia a todas las personas que no se odian a sí mismas.
   e) Todos aman a alguien y ninguno ama a todos, o bien alguien ama a todos.
   f) x es racional si y sólo si x es el cociente de dos enteros.

8. Usando como lenguaje el de primer orden que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

   a) Existe al menos un elemento.
   b) Existen al menos dos elementos.
   c) Existen exactamente dos elementos.
   d) Existen a lo sumo dos elementos.

   Agregando al lenguaje anterior un símbolo de predicado unario P, escribir:

   d) No existe ningún elemento que cumple la propiedad P.
   e) Existe al menos dos elementos que cumplen la propiedad P.
   f) Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad P.
   g) Si existe un elemento que cumple la propiedad P, ese elemento es único.
   h) Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

9. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las siguientes interpretaciones:

   a) $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +)$. b) $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$.

   donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguible en ambas interpretaciones.

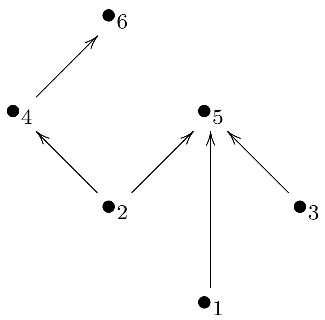
10. Probar que si el universo de una interpretación es finito con $n+1$ elementos, y tiene la propiedad que n elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

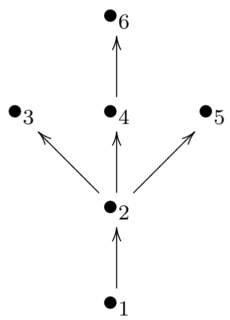
11. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario $\leq$ (reflexivo, antisimétrico y transitivo).

    a) En cada una de las siguientes interpretaciones, buscar los elementos que verifican la fórmula

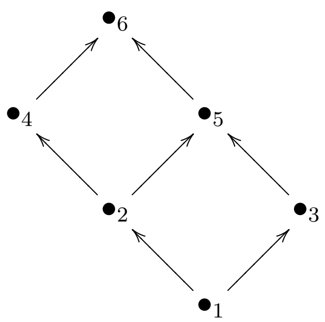
    $$\alpha = \exists y \exists z \left((y \leq x) \wedge \neg (x \leq y) \wedge (z \leq x) \wedge \neg (x \leq z) \wedge \neg ((y \leq z) \vee (z \leq y)) \right)$$

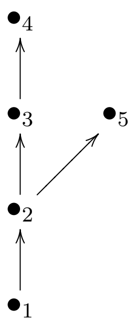
    b) Para cada una de las siguientes interpretaciones, buscar una fórmula que se verifique sólo para 6





12. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario $\leq$ (reflexivo, antisimétrico y transitivo). Probar que todos los elementos del universo de las siguientes interpretaciones son distinguibles:





13. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario $\leq$ (reflexivo, antisimétrico y transitivo).

    a) Mostrar un ejemplo de universo e interpretación tal que no haya elementos distinguibles.

b) Mostrar un ejemplo de universo e interpretación tal que haya algunos elementos distinguibles y otros no distinguibles.

14. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario $\leq$ (reflexivo, antisimétrico y transitivo). ¿Cuántos subconjuntos definibles tiene el universo de las siguientes interpretaciones?