

Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 4: Compacidad

1. Sean los conjuntos de fórmulas $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ tales que $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ para $i \geq 1$. Probar que si P es consecuencia de $\cup_{i \geq 1} \Gamma_i$ entonces P es consecuencia de infinitos de los conjuntos Γ_i .
2. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos satisfactibles de fórmulas, tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfactible. Probar que existe una fórmula α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.
3. Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional que verifica la siguiente propiedad: si α y β son fórmulas de Γ , entonces $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología o bien $\beta \rightarrow \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe una fórmula $\alpha \in \Gamma$ tal que $\{\alpha\} \models \gamma$.
4. Sea Γ un conjunto de fórmulas. Mostrar que si cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ , entonces existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en Γ tales que $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$ es tautología.
5. El procedimiento de Lindenbaum para obtener un conjunto maximal consistente a partir de un conjunto consistente Γ .
 - Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje ψ_1, ψ_2, \dots
 - Definimos la secuencia de conjuntos:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \Gamma \\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\psi_n\} & \text{si el conjunto es consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\psi_n\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \Gamma_\infty &= \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n\end{aligned}$$

Demostrar:

- a) Cada Γ_i es consistente.
- b) Exactamente una de las fórmulas ψ y $\neg\psi$ está en Γ_∞ para cada fórmula ψ_n .
- c) Si $\Gamma_\infty \models \psi$, entonces $\psi \in \Gamma_\infty$.
- d) Γ_∞ es un conjunto maximal consistente.

6. Sea α una fórmula satisfactible. Se construye un conjunto Γ inductivamente del siguiente modo:

- $\Gamma_0 = \{\alpha\}$
- $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\beta\}$
donde β es una fórmula que es disyunción de literales (variables proposicionales o negación de variables proposicionales), y que contiene una variable proposicional o negación de una variable proposicional que no aparece en ninguna de las fórmulas de Γ_i .

Probar que $\Gamma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$ es satisfactible.

7. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Diremos que Γ_2 es *consecuencia débil* de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1 , entonces existe una fórmula de Γ_2 tal que dicha valuación hace verdadera a la fórmula. Diremos que Γ_2 es *consecuencia fuerte* de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1 , entonces dicha valuación hace verdadera a todas las fórmulas de Γ_2 .

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Si Γ_2 es consecuencia débil de Γ_1 , entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia de S .
- b) Si Γ_2 es consecuencia fuerte de Γ_1 , entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia fuerte de S .

8. Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Se define

$$\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 = \{\alpha \rightarrow \beta / \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}.$$

Probar que si $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ es insatisfactible, entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ fórmulas de Γ_1 y β_1, \dots, β_m fórmulas de Γ_2 tales que $(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n) \rightarrow (\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_m)$ es insatisfactible.

9. Establecer resultados análogos a los del ejercicio anterior para los otros conectivos (y probarlos).