Lógica y Computabilidad

FCEyN - UBA

Primer Cuatrimestre 2013

Práctica 3: Consecuencia Lógica

Notación Si Γ es un conjunto de fórmulas, denotaremos por $Con(\Gamma)$ al conjunto de fórmulas que son consecuencia lógica de Γ.

1. Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfactibles, y en tal caso encontrar todas las valuaciones que satisfacen a dichos conjuntos.

   a) $\Gamma = \{p_1\}$.

   b) $\Gamma = \{\neg p_1\}$.

   c) $\Gamma = \{((p_1 \to p_2) \to p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.

   d) $\Gamma = \{((p_1 \to p_2) \to p_3), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$.

   e) $\Gamma = \{((p_2 \to p_1) \to p_1), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \to p_1)\}$.

2. Decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

   a) $(\neg (p_1 \vee p_2) \to ((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \to p_3)))$.

   b) $\neg ((p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to ((p_1 \vee p_2) \to p_3)))$.

   c) $((p_1 \vee p_2) \to (p_3 \to ((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))))$.

   d) $((\neg\neg\neg (p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \to p_4)$.

   e) $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_1)$.

3. Sea $\Gamma \subseteq Form$.

   a) Probar que si Γ es satisfactible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfactible.

b) Mostrar (con un ejemplo) que la recíproca no es cierta.

c) Probar que Γ es satisfactible si y sólo si $Con(\Gamma)$ es satisfactible.

4. (*)

   a) Sea Γ un conjunto satisfactible de fórmulas. Probar que si el conjunto de valuaciones que satisface a Γ es finito entonces Γ es infinito.

   b) Probar que si k es un número natural, entonces existe un conjunto satisfactible Γ de fórmulas del cálculo proposicional tal que existen exactamente k valuaciones que satisfacen a Γ.

5. Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional tal que $\Gamma = Con(\Gamma)$. Probar que Γ es infinito.

6. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ conjuntos de fórmulas.

   a) Probar que $Con(\emptyset) = \{\alpha \in Form/\alpha$ es una tautología$\}$.

   b) Probar que $\Gamma \subseteq Con(\Gamma)$.

   c) Probar que $Con(Con(\Gamma)) = Con(\Gamma)$.

   d) Probar que $Con(\Gamma_1) \cup Con(\Gamma_2) \subseteq Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

   Sin embargo ...

   e) Probar que no vale para todo Γ_1, Γ_2 la propiedad $Con(\Gamma_1) \cup Con(\Gamma_2) \supseteq Con(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

   Ver que de las propiedades anteriores se deduce:

   f) Probar que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $Con(\Gamma_1) \subseteq Con(\Gamma_2)$.

   g) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq Con(\Gamma_2)$ entonces $Con(\Gamma_1) \subseteq Con(\Gamma_2)$.

7. Sean $\alpha, \beta \in Form$. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   a) $Con(\{\beta\}) \subseteq Con(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología.

   b) $Con(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = Con(\{\alpha\}) \cap Con(\{\beta\})$.

   c) $Con(\{(\alpha \vee \beta)\}) = Con(\{\alpha\}) \cup Con(\{\beta\})$.

   d) $Con(\{(\alpha \rightarrow \beta)\}) \subseteq Con(\{\beta\})$.

8. Demostrar que son equivalentes las siguientes propiedades:

a) $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in Con(\emptyset)$.

b) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.

c) Existe una fórmula β tal que $\beta \in Con(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in Con(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

d) $\beta \in Con(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β.

9. Sea Γ un conjunto satisfactible de fórmulas. Decimos que Γ es *maximalmente satisfactible* si para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$ se tiene que $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es insatisfactible.

   Mostrar un ejemplo de conjunto maximalmente satisfactible (*Pista*: puede contruirse por comprensión).

10. Dado un conjunto satisfactible de fórmulas Γ:

    a) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si existe una valuación $v \in Val$ tal que $\Gamma = \{\alpha \in Form / v(\alpha) = 1\}$.

    b) Probar que Γ es maximalmente satisfactible si y sólo si para toda fórmula α se tiene que $\alpha \in \Gamma$ o $\neg\alpha \in \Gamma$.

    c) Probar que existe $\Gamma' \subseteq Form$ maximalmente satisfactible tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

    d) Si Γ maximalmente satisfactible, probar que si $(\alpha \vee \beta) \in \Gamma$, entonces $\alpha \in \Gamma$ o $\beta \in \Gamma$

    e) Si Γ es maximalmente satisfactible, probar que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\alpha \in \Gamma$.

11. Dado un conjunto satisfactible de fórmulas Γ:

    a) Si Γ es un conjunto maximalmente satisfactible, ¿es necesariamente $\Gamma = Con(\Gamma)$?

    b) Si $\Gamma = Con(\Gamma)$, ¿es necesariamente Γ un conjunto maximalmente satisfactible?

12. Decimos que dos conjuntos $\Gamma, \Gamma' \subset Form$ son *equivalentes* si para toda formula α se tiene que $\Gamma \models \alpha$ si y sólo si $\Gamma' \models \alpha$.

    a) Probar que $\{p_1, p_2\}$ es equivalente a $\{p_1 \wedge p_2\}$.

    b) Probar que Γ es equivalente a Γ' si y sólo si $Con(\Gamma) = Con(\Gamma')$.

c) Hallar una fórmula α tal que que $\{p_1, p_1 \to p_2\}$ sea equivalente a $\{\alpha, p_2 \to p_1\}$.

d) ¿Existe alguna fórmula α tal que que $\{p_1 \to p_2\}$ sea equivalente a $\{p_2 \to \alpha\}$?

13. Decimos que un conjunto Γ es *independiente* si ninguna fórmula de Γ es consecuencia lógica de las restantes fórmulas deΓ.

    a) Probar que todo conjunto finito de fórmulas tiene un subconjunto independiente equivalente.

    b) Probar que un conjunto infinito de fórmulas no siempre tiene un subconjunto independiente equivalente.

    c) (*) Si Γ es infinito, mostrar que existe un conjunto independiente equivalente Γ' (aunque en general Γ' no es un subconjunto de Γ).