ESTADÍSTICA (Química)
PRÁCTICA 4 – Sumas de variables aleatorias

1. Se realizan mediciones independientes del volumen inicial y final en una bureta. Supongamos que las mediciones inicial y final siguen el modelo de errores independientes e idénticamente distribuidos, es decir,

$$X = \alpha + e_X \qquad Y = \beta + e_Y$$

donde α y β son los volúmenes desconocidos y e_X y e_Y, los errores de medición, son variables aleatorias con media 0 y varianza σ^2. Sea Z = Y – X.

a) Halle E(Z) y V(Z).

b) En una titulación, la lectura inicial en una bureta es de 3.51ml y la lectura final es de 15.67ml. Para ambas mediciones se sabe que el error de medición tiene una desviación estándar de 0.02ml.

i. ¿Cuál es aproximadamente el volumen utilizado?

ii. ¿Cuál es la desviación estándar de su error de medición?

2. Se diseña un ascensor cuyo límite de carga es de 2000 libras. Se indica que su capacidad máxima es de 10 personas. Si el peso de cada persona sigue una distribución normal con esperanza μ = 185 libras y desvío estándar σ = 22 libras,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo de 10 personas elegidas al azar exceda el límite de carga?

b) ¿Podría calcular, con los datos con los que se cuenta, la probabilidad de que un grupo de 10 personas de la misma familia exceda el límite de carga? Justifique.

3. Supongamos que el peso de un frasco de mermelada sigue una distribución normal con un peso medio de μ_A = 1004g para la marca A y μ_B = 1002g para la marca B, y con desvíos σ_A = 8g y σ_B = 6g, respectivamente. Se eligen al azar n_A = 40 frascos de la marca A y n_B = 35 frascos de la marca B, y se pesan sus contenidos.

a) Defina las variables aleatorias involucradas en este problema. Indique la distribución exacta o aproximada de las medias muestrales asociadas a ambas marcas. Indique la distribución exacta o aproximada de la diferencia entre la media muestral para la marca A y la media muestral para la marca B. Enuncie los resultados teóricos en los que se basa.

b) Calcule la probabilidad de que la distancia entre las medias muestrales sea a lo sumo 3.

c) Calcule la probabilidad de que la distancia anterior sea por lo menos 6.

d) ¿Se modifican las distribuciones de a) si n_A = 400 y n_B = 350? Justifique.

4. Continuemos el ejercicio 11 de la práctica 2, cuyo enunciado decía:

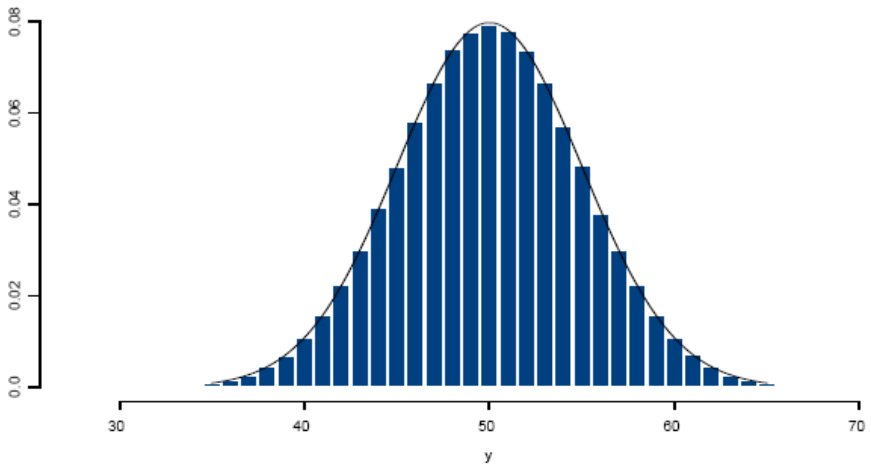
El número de burbujas de aire en una placa de vidrio sigue un proceso de Poisson de parámetro 0.4 burbujas por cada m². El precio de venta de la placa de vidrio de 2.5m × 2m depende de la cantidad de burbujas de aire. Si la placa no tiene burbujas de aire, el precio de venta de la placa es de $50, si la placa tiene 1 ó 2 burbujas el precio de venta es de $40 y si tiene más de 2 burbujas el precio de venta es de $20. Al fabricante le cuesta $15 producir una placa de vidrio. Hallar la probabilidad puntual de la ganancia neta obtenida por el fabricante al vender una placa. Las placas se venden en lotes de 15.

a) ¿Cuál es la ganancia neta esperada por el productor al vender un lote?

b) ¿Cuál es la varianza de la ganancia neta? Asuma que las ganancias netas son independientes para las placas que integran un lote.

5. Suponga que una variable aleatoria X tiene distribución N(μ, σ² = 0.25). Sea $\overline{X}_n$ el promedio de *n* observaciones independientes de dicha variable.
   a) Si *n* = 10, calcular P(| $\overline{X}_n$ – μ| < 0.35). Observe que realizó este cálculo sin conocer el valor de la media μ.
   b) Usando Tchebycheff acote P(| $\overline{X}_n$ – μ| < 0.35).
   c) ¿Cuán grande debe ser *n* para que P(| $\overline{X}_n$ – μ| < 0.35) ≥ 0.99? Realice el cálculo utilizando la distribución normal y también utilizando la cota de Tchebycheff. Compare.

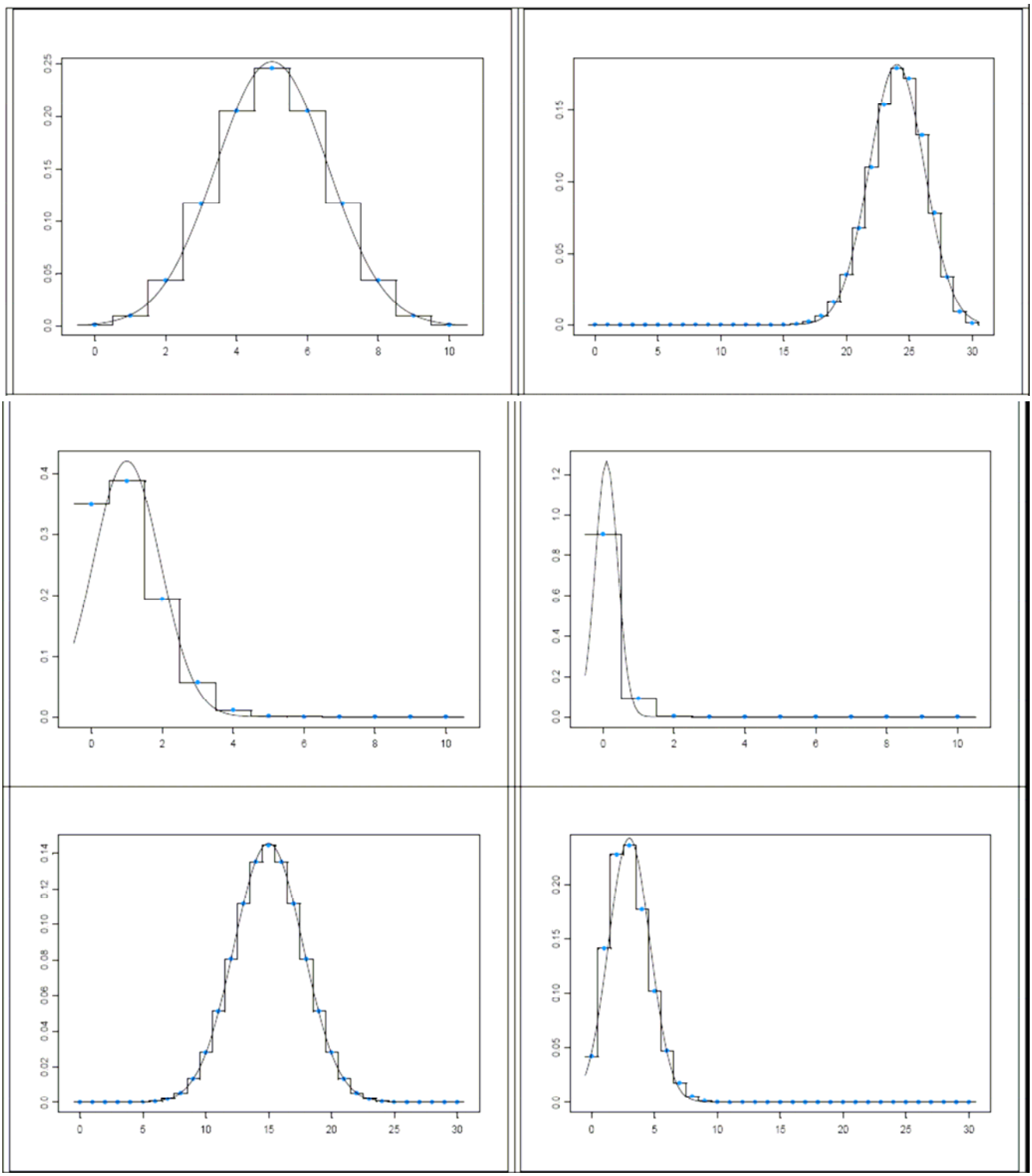
6. La figura muestra el histograma de probabilidad de una distribución Bi(100, 0.5) junto con una curva normal.
   a) ¿Cuáles son los valores de μ y σ^2 que corresponden a la curva normal dibujada?
   b) La probabilidad de obtener 52 caras en 100 tiradas de una moneda equilibrada, ¿es exactamente igual al área entre 51.5 y 52.5 bajo la curva normal o al área bajo el histograma de probabilidad?



7. Se arroja una moneda 10000 veces. Estimar la probabilidad de obtener:
   a. entre 4900 y 5050 caras inclusive.
   b. 4900 caras ó menos.
   c. 5050 caras ó más.

8. Los siguientes seis gráficos muestran la función de probabilidad puntual de una variable Bi(n,p) y la correspondiente aproximación a través de la función de densidad de una variable Normal N(np,np(1-p)), para los siguientes valores de los parámetros *n* y *p*:

i. n = 10; p = 0.01
ii. n = 10; p = 0.1
iii. n = 10; p = 0.5
iv. n = 30; p = 0.1
v. n = 30; p = 0.5
vi. n = 30; p = 0.8



a) Indique a qué combinación de parámetros corresponde cada gráfico. ¿En qué casos la aproximación normal funciona mejor?
b) Para una variable X con distribución Bi(n,p) con n = 10; p = 0.01, calcule los valores de P(X = 1) y P(X = 0) de manera exacta y de manera aproximada (con corrección por continuidad) y compárelos.

9. Se tira 100 veces un dado de 6 caras. Use la aproximación normal para hallar:
   a. la probabilidad de que salga "6" entre 15 y 20 veces, inclusive.
   b. la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos sea menor que 300.

10. El teorema central del límite puede ser utilizado para analizar errores de redondeo. Suponga que el error de redondeo se representa mediante una variable aleatoria uniforme en [-0.5, 0.5]. Si se suman 100 números, halle la probabilidad de que el error de redondeo exceda en valor absoluto a:
    a) 1 b) 2 c) 5

11. En cierto juego la probabilidad de ganar es 0.3. Para participar en el mismo se paga $1 y en caso de ganar se reciben $3.
    a. ¿Cuál es *aproximadamente* la probabilidad de que en 50 juegos independientes un jugador gane por lo menos $10?
    b. ¿Puede calcular la probabilidad pedida en a) *exactamente*?

12. Para rellenar una zona del río se utilizan 2 camiones (A y B). La distribución de la carga diaria (en toneladas métricas) transportada por el camión A tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{52} & \text{si } 11 < x < 15 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El camión B lleva una carga diaria en toneladas con esperanza 18Tm y desvío estándar 1.3Tm.
a) Calcule esperanza y varianza de la carga diaria transportada por A.
b) Calcule esperanza y desvío estándar de la carga total llevada por los dos camiones en un día.
c) Calcule *aproximadamente* la probabilidad de que la carga total transportada en 256 días esté entre 7950 y 8000Tm.
d) ¿Puede calcular la probabilidad pedida en c) *exactamente*?

13. De acuerdo a un estudio sobre factores de riesgo para patología cardiaca, el 40% de los varones adultos de más de 50 años son o han sido fumadores (los llamaremos "fumadores"). Se selecciona una muestra al azar de 100 varones de más de 50 años. Suponiendo que los datos del estudio son correctos,
    a. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de obtener 50 ó más fumadores?
    b. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que la proporción de fumadores en una muestra de 100 personas difiera de la proporción poblacional en menos de 0.05?
    c. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de b) sea por lo menos 0.9?

14. Un negocio de mascotas ofrece el siguiente servicio para sus clientes que toman vacaciones. El servicio consiste en alquilarle al dueño de la mascota un dispenser automático de raciones diarias de alimento balanceado. Cuando el animal termina de comer una ración,

automáticamente, el dispenser pone a su disposición la ración siguiente. El tiempo (en días) que el gato de Felipe demora en comer una ración de alimento es una variable aleatoria Exponencial con parámetro $\lambda=2$. Se puede suponer que los tiempos que tarda en comer cada ración son independientes entre sí.

a. Felipe se va 30 días de vacaciones y contrata este servicio con 62 raciones. Si el gato no tiene comida disponible se escapa de la casa. ¿Cuál es la probabilidad de que Felipe encuentre al gato en su hogar al volver de las vacaciones?
b. ¿Cuántas raciones tiene que comprar si quiere encontrar al gato en su casa al volver de las vacaciones con una probabilidad mayor o igual que 0.99?