ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Primer cuatrimestre 2013

Práctica 5 - Subespacios y rango de matrices

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial dado:

   (a) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$.

   (b) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 3\}$.

   (c) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$.

   (d) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 < -1\}$.

   (e) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_2 = 0\}$.

   (f) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 4x_2 \geq 0\}$.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Probar que $S = \{v \in \mathbb{R}^n : A \cdot v^t = 0\}$, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

3. Dibujar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y analizar si son subespacios o no:

   (a) $S = \{t(1, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.

   (b) $S = \{t(1, 2) + (2, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.

   (c) $S = \{t(1, 1) + (2, 2) : t \in \mathbb{R}\}$.

   (d) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

   (e) $S = \{s(1, 2) + t(2, 4) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

   (f) $S = \{s(1, 2) + t(2, 2) : s, t \in \mathbb{R}$ con $s + t = 1\}$.

4. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y sean v_0, v_1 y $v_2 \in \mathbb{V}$.

   (a) Probar que $S = \{t \cdot v_0 : t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

   (b) Probar que $T = \{s \cdot v_1 + t \cdot v_2 : s, t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

   (c) Describir geométricamente los subespacios S y T.

5. Se consideran los vectores $v_1 = (2, 3)$ y $v_2 = (1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$. Determinar si $u = (1, 2)$ es combinación lineal de v_1 y v_2. ¿Qué sucede con $w = (0, 0)$?

6. Analizar si $v \in S$ o no en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $S = \langle(1, 2, 3)\rangle$; $v = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$.

   (b) $S = \langle(1, 2, 3),\ (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})\rangle$; $v = (-5, -10, -15)$.

   (c) $S = \langle(1, -1, 2, 1),\ (2, 1, 3, 0)\rangle$; $v = (0, -3, 1, 1)$.

7. En cada caso, hallar dos subespacios distintos de $\mathbb{R}^3$ con las condiciones:

   (a) que contenga al vector $v = (1, 2, 3)$.

   (b) que contenga al vector $v = (1, 1, 0)$ y no contenga al vector $w = (0, 1, 1)$.

8. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^n$ o no:

   (a) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1)\}$.

   (b) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1), (3, 4)\}$.

   (c) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0)\}$.

   (d) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}$.

   (e) $n = 4$, $\{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, -2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\}$.

9. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

   (a) $\{(1,-3,5),\ (-2,2,1),\ (-1,-1,6)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$.
   (b) $\{(1,2,2,-1),\ (0,2,-2,-3),\ (1,1,0,2),\ (0,1,-1,0)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$.
   (c) $\{v\}$ con $v\in\mathbb{V}$.
   (d) $\{v_1,v_2,\dots,v_n,0\}$ con $v_1,v_2,\dots v_n,0\in\mathbb{V}$.

10. Hallar (si es posible) tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.

11. Determinar todos los $k\in\mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores resultan linealmente independientes en $\mathbb{V}$:

   (a) $\{(1,-1,2),\ (k+1,k,k+6),\ (k,k+1,1)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$.
   (b) $\{(k-2,k,1,0),\ (0,k,0,0),\ (1,1,0,k-1)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$.

12. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son una base del espacio $\mathbb{V}$. En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender el conjunto a una base de $\mathbb{V}$.

   (a) $\{(1,0,1),\ (1,0,-1)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$.
   (b) $\{(1,1,2),\ (0,1,1),\ (0,0,0)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$.
   (c) $\{(1,1,2),\ (0,1,1),\ (2,3,3)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$.
   (d) $\{(1,0,1),\ (1,0,-1),\ (0,0,1),\ (1,1,1)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$.
   (e) $\{(1,1,1,1,1),\ (1,2,0,1,1),\ (1,1,1,2,1)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^5$.

13. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

   (a) $S=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ x_1+x_2=0,\ x_3-x_2=0\}$.
   (b) $S=\{x\in\mathbb{R}^5:\ x_1-2x_3+x_5=0,\quad 2x_1+x_4-2x_5=0,\quad 3x_1-2x_3+x_4-x_5=0\}$.
   (c) $S=\langle(1,1,-1),\ (0,1,1),\ (1,2,0)\rangle$.

14. Sea $S=\langle(0,-1,k),\ (1,-1,0),\ (-1,0,2)\rangle$. Estudiar la dimensión y dar una base del subespacio S en función de k.

15. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $S=\{x\in\mathbb{R}^3:\ 2x_1-x_2+x_3=0,\ -4x_1+2x_2-2x_3=0\}$ y $T=\langle(2,3,-1),\ (-2,1,5),\ (4,2,-6)\rangle$:

   (a) Probar que $T\subset S$.
   (b) Calcular $\dim(S)$, $\dim(T)$ y decidir si vale la igualdad $T=S$ o no.

16. En cada uno de los siguientes casos, hallar bases de S, T, $S\cap T$ y $S+T$. ¿Qué relación existe entre las dimensiones de estos cuatro subespacios?

   (a) $S=\{x\in\mathbb{R}^4:\ x_1+x_2+x_3=0,\ x_1-x_2=0\}$,
   $T=\{x\in\mathbb{R}^4:\ x_1=0,\ x_2-x_4=0,\ x_1-x_3+x_4=0\}$.
   (b) $S=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1+2x_2-x_3=0\}$, $\quad T=\langle(1,1,1),\ (0,-2,0)\rangle$.
   (c) $S=\langle(-1,2,-1,2),\ (1,-1,0,1),\ (0,1,-1,2)\rangle$,
   $T=\langle(1,0,1,1),\ (0,1,1,-1),\ (1,1,2,0)\rangle$.

17. Para los subespacios $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \langle (2,-1,-1,3),\ (1,1,0,-2),\ (4,1,-1,-1)\rangle$:

   (a) Hallar una base $\mathcal{B}_1$ del subespacio $S \cap T$.

   (b) Extender la base $\mathcal{B}_1$ a una base de S. Hacer lo mismo para una base de T.

   (c) Hallar una base $\mathcal{B}_2$ del subespacio $S + T$ que contenga una base de S y una base de T. Extender $\mathcal{B}_2$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

18. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0, -2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $T = \langle (0,1,2,0), (1,2,0,\lambda)\rangle$.

   (a) Hallar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $S \cap T \neq \{0\}$.

   (b) Para cada valor λ hallado en (a), encontrar una base de $S \cap T$.

19. Sean S y T subespacios de $\mathbb{R}^6$ tales que $\dim(S) = 3$ y $\dim(T) = 4$.

   (a) Decidir si las siguientes situaciones son posibles o no:
   (i) $S \subset T$. *(ii)* $\dim(S+T) = 7$. *(iii)* $\dim(S \cap T) = 4$. *(iv)* $S \cap T = \{0\}$.

   (b) Si $\dim(S \cap T) = 3$, ¿qué puede decirse de S y T?

   (c) Si $\dim(S + T) = 4$, ¿qué puede decirse de S y T?

20. Dadas las matrices

$$A = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

   (a) hallar una base y la dimensión del espacio fila, del espacio columna y del núcleo.

   (b) calcular el rango.

   (c) repetir los ítems (a) y (b) para las respectivas matrices transpuestas.

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

   (a) Si $m = 7$, $n = 8$ y $\mathrm{rg}(A) = 2$, calcular $\dim(N(A))$.

   (b) Si $m = 6$, $n = 5$ y $\dim(N(A)) = 3$, calcular $\mathrm{rg}(A)$.

   (c) Si $m = 3$, $n = 5$ y $\dim(E_C(A^t)) = 3$, calcular $\mathrm{rg}(A)$ y $\dim(N(A))$.

22. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

   (a) Hallar una base y la dimensión de $E_C(A)$.

   (b) Calcular $\dim(N(A))$, $\dim(N(A^t))$, $\dim(E_F(A))$, $\mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A^t)$.

23. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$ y sea $b \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Determinar el rango de la matriz ampliada $[A|b] \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ para que el sistema $A \cdot x = b$ tenga solución.

24. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$.

   (a) Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ que hace que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

   (b) Para el valor de b hallado, decidir si $v = (3,2,2) \in E_C(A)$ y hallar una base de $N(A^t)$.

25. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & k+2 & 1 \\ -1 & k^2-7 & -1 & -2 \\ 1 & k^2-11 & 2k+7 & k-9 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\dim(N(A)) = \dim(E_F(A^t))$.

(b) Para cada k hallado, calcular una base de $N(A)$ y una base de $N(A^t)$.

26. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ y sean $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ y $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dos matrices tales que $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$.

Calcular $\mathrm{rg}(A \cdot B \cdot A)$ y $\dim(N(A \cdot B \cdot A))$, y hallar una base de $N(A \cdot B \cdot A)$.

27. Sean $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ y $Q \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ tales que $\mathrm{rg}(P) + \dim(N(Q)) = 6$ y $\dim(E_F(P^t)) = 5$.

(a) Calcular $\dim(N(P))$, $\mathrm{rg}(P)$, $\dim(N(Q))$ y $\mathrm{rg}(Q)$.

(b) Calcular $\mathrm{rg}(Q^t \cdot P^{-1}))$.

(c) Calcular $\dim[N((W \cdot P^{199})^t)]$, si $W \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ es una matriz tal que $\dim(N(W)) = 3$.

28. Sean $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y S el sistema $S : \begin{cases} ax + y + bz &= 0 \\ 2ax - y + bz &= 0 \end{cases}$.

Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el subespacio $N(A)$ coincida con el espacio de soluciones de S.

29. Para cada uno de los siguientes subespacios S, hallar $m, n \in \mathbb{N}$, y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tales que $N(A) = S$.

(a) $S = \langle (1,3,1),\ (-2,1,0) \rangle$.

(b) $S = \langle (1,3,1,-2),\ (-2,1,0,3),\ (-1,4,1,1) \rangle$.

30. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $S = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_1 + 2x_2 + (\alpha+2)x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ -x_1 + (\alpha^2-7)x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 + (\alpha^2-11)x_2 + (2\alpha+7)x_3 + 2x_4 = 0\}$:

(a) Calcular $\dim(S \cap T)$ es términos del valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 1$, hallar una base de $S \cap T$.

(c) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 2$, hallar una base de $S + T$.