ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Primer cuatrimestre 2013

Práctica 4 - Geometría lineal

Operaciones vectoriales (II)

1. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:

   (a) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (-2, 2)$.
   (b) $\vec{v} = (2, -3)$; $\vec{w} = (0, 0)$.
   (c) $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.
   (d) $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\vec{w} = (-2, 1, 1)$.

2. Hallar:

   (a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$. ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.
   (b) Todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.
   (c) Tres vectores de $\mathbb{R}^3$, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.
   (d) Un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?
   (e) Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).

3. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

   (a) $\vec{v} = (1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
   (b) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (0, 1)$.
   (c) $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (-2, 1)$.
   (d) $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

4. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:

   (a) el ángulo entre ambos vectores.
   (b) el módulo de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.

6. Calcular el producto vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ para los siguientes pares de vectores:

   (a) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$.
   (b) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (2, 1, -3)$.
   (c) $\vec{u} = (2, 1, -3)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$.
   (d) $\vec{u} = (2, 0, 0)$; $\vec{v} = (0, 0, 3)$.

   En cada caso, verificar que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

7. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en $\mathbb{R}^3$:

   (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Es único?
   (b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a $\vec{w}$ y $\vec{z}$.
   (c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a $\vec{w}$ y $\vec{z}$. ¿Es único?

Geometría lineal

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L:

(a) $L: t(-2,3)+(2,2)$
$P_1=(2,2),\ P_2=(-2,3),\ P_3=(0,0),\ P_4=(12,-13),\ P_5=(2,-1)$.

(b) $L: t(-1,1)+(3,-3)$
$P_1=(3,-3),\ P_2=(0,0),\ P_3=(-1,1),\ P_4=(3,4),\ \ P_5=(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

2. Graficar y dar una ecuación vectorial para la recta que:

   (a) pasa por $P=(-1,2)$ con vector director $v=(3,1)$.

   (b) pasa por $P=(1,-4)$ y $Q=(-1,-3)$.

   (c) es paralela a la recta $L:\ t(-2,3)+(1,-1)$ y pasa por $P=(1,-4)$.

   (d) es perpendicular a la recta $L:\ t(2,3)+(5,7)$ y pasa por el origen.

3. (a) Dar una ecuación vectorial para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   i. $y=-2x+1$.
   ii. $2x-3y=5$.
   iii. $y=-2$.
   iv. $x=3$.

   (b) Dar una ecuación implícita para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   i. $L: t(3,2)+(1,1)$. ii. $L: t(2,0)+(-1,3)$. iii. $L: t(0,-1)+(2,1)$.

4. En cada uno de los siguientes casos, dar una ecuación vectorial para la recta que:

   (a) está dirigida por $v=(0,1,0)$ y pasa por $P=(0,2,4)$.

   (b) pasa por los puntos $P=(-2,3,4)$ y $Q=(-1,3,1)$.

   (c) es paralela al eje z y pasa por $P=(1,2,3)$.

   (d) es perpendicular a la recta $L:\ t(1,-2,1)+(3,5,7)$ y pasa por $P=(1,9,-3)$. ¿Es única?

5. Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por v y w que pasa por el punto P en los siguientes casos:

   (a) $v=(0,1,0)$, $w=(1,0,0)$, $P=(0,0,1)$.

   (b) $v=(0,2,0)$, $w=(1,1,0)$, $P=(-1,2,1)$.

   Graficar los planos y compararlos.

6. (a) Dar una ecuación implícita para el plano $\pi: t(1,1,0)+s(0,-1,2)+(-2,0,4)$.

   (b) Dar una ecuación vectorial para el plano $\pi: -x+3y+2z=1$.

7. Dar una ecuación paramétrica y una ecuación implícita para el plano que:

   (a) pasa por los puntos $(2,1,2),\ (1,1,1)$ y $(3,2,7)$.

   (b) pasa por el punto $(1,2,1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y.

   (c) es paralelo a la recta $L:\ t(1,2,-4)+(1,2,1)$ y contiene a los puntos $P=(2,2,1)$ y $Q=(1,2,-3)$.

   (d) contiene al punto $(-1,2,2)$ y es ortogonal a la recta $L:\ t(1,1,-1)+(-1,2,2)$.

8. (a) Decidir si los puntos $A=(1,1,1),\ B=(-2,0,1)$ y $C=(3,0,2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.

   (b) Decidir si los puntos $A=(8,2,4),\ B=(4,2,8),\ C=(-2,0,1)$ y $D=(1,-1,3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.

9. Dado el plano $\pi:\ 2x-5y+3z=11$:

(a) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2a, a, 7) \in \pi$.

(b) Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1, 3a, 5a) \in \pi$.

10. Sean $\pi : 2x - y + 3z = 5$, $L : t(1, -1, -1) + (1, 0, -2)$ y $L' : t(3, 5, 1) + (0, 1, 2)$. Calcular $L \cap \pi$ y $L' \cap \pi$.

11. Determinar si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:

    (a) $L: \ t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2), \quad L': \ t(-1, 1, 2) + (1, 0, -1)$.

    (b) $L: \ t(1, 1, -1) + (-1, 2, 2), \quad L': \ t(2, 2, -2) + (1, 0, -1)$.

    (c) $L: \ t(1, \frac{1}{2}, -1) + (-1, 1, 2), \quad L': \ t(-2, -1, 2) + (3, 3, -2)$.

    (d) $L: \ t(1, 2, -1) + (-1, -1, 2), \quad L': \ t(-1, 1, 1) + (3, 2, -1)$.

    En cada caso determinar si existe un plano que contenga a L y L'. Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

12. Determinar en qué casos los planos π_1 y π_2 se intersecan y hallar la intersección.

    (a) $\pi_1: \ 4x + 2y - 3z = 1; \quad \pi_2: \ 2x + y - \frac{3}{2}z = 1$.

    (b) $\pi_1: \ 3x - 2y - 1 = 0$; π_2 el plano dirigido por $(0, 0, 1)$, $(2, 3, 3)$ que pasa por $(1, 1, 2)$.

    (c) π_1 el plano que pasa por $(-1, 1, 2)$ con vector normal $(1, 2, -1)$;
    π_2 el plano que pasa por $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 1)$ y $(-1, -2, 2)$.

13. Hallar ecuaciones implícitas para cada una de las rectas siguientes (es decir, describirlas como intersección de dos planos dados por ecuaciones implícitas):

    (a) L que es intersección del plano xy con el plano yz.

    (b) $L: \ t(1, 0, -1) + (-1, 1, 2)$.

    (c) L que pasa por los puntos $(-5, 3, 7)$ y $(2, -3, 3)$.

14. En cada uno de los siguientes casos, hallar la intersección de las rectas L y L':

    (a) $L : t(1, 1, 0) + (0, -1, 2), \quad L' : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$.

    (b) $L : t(1, 1, 0) + (0, -1, 2), \quad L' : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + 2y + z = 2 \end{cases}$.

15. Sean L_1 y L_2 las rectas de $\mathbb{R}^2$, $L_1 : x - y = 1$, y $L_2 : x + y = 3$.

    (a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2.

    (b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1, L_3) = \angle(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

16. Sean $L_1 : t(1, -2, 1) + (0, 0, -2)$ y L_2 la recta que pasa por $(1, 4, 2)$ y $(0, 2, -1)$.

    (a) Verificar que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

    (b) Hallar un plano que contenga a L_1 y L_2 y determinar el ángulo entre L_1 y L_2.

17. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1, 2, -1)$ y pasa por $(-1, 3, 1)$, y sea L_2 la recta que pasa por $(-1, 1, 3)$ y por $(1, 2, 7)$.

    (a) Verificar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

    (b) Determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1, 1, 3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2.

18. Encontrar **todos** los puntos de la recta $L: \ t(1, -1, 0) + (2, 1, -1)$ que están a distancia 6 del punto $P = (2, 1, -1)$.

19. Calcular la distancia entre:

    (a) la recta $L: \ t(1, 1) + (3, 0)$ y el punto $P = (-1, 1)$.

    (b) la recta $L: \ t(1, 1, 0) + (3, 0, 0)$ y el punto $P = (-1, 1, 0)$.

    (c) el plano π que pasa por $(1, 2, 1)$ y tiene vector normal $(1, -1, 2)$ y el punto $P = (1, 2, 5)$.

20. Sean $L : t(2, -2, -3) + (0, 2, 2)$ y $P = (0, -2, -1)$.

    (a) Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por P y determinar $Q = L \cap \pi$.

    (b) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa en este problema el número $d(P, Q)$?

21. Se consideran las rectas $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 4x - y - 2z &= 9 \end{cases}$ y $L_2 : \ t(1, 0, 2) + (1, 2, -3)$.

    (a) Probar que L_1 y L_2 son paralelas.

    (b) Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por $P = (1, 2, -3)$ y determinar $Q = L_1 \cap \pi$.

    (c) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa el número $d(P, Q)$ en este problema?

22. Sean π el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y L la recta $L : t(-1, 0, 1) + (1, 1, 2)$.

    (a) Probar que L es paralela a π.

    (b) Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por $P = (1, 1, 2)$ y determinar $Q = L' \cap \pi$.

    (c) Calcular $d(P, Q)$. ¿Qué significa el número $d(P, Q)$ en este problema?