

El objetivo de este trabajo es estudiar la velocidad de un cuerpo en caída libre a lo largo del tiempo. Un modelo sencillo de este fenómeno está dado por la ecuación:

$$v' = -\frac{b}{m}v^2 + g \quad (1)$$

siendo v la velocidad, m la masa del cuerpo, $g = 9.8$ la aceleración gravitatoria y b una constante que representa el rozamiento con el aire (o, en general, con el fluido en el que se produzca la caída). Naturalmente, esta ecuación irá acompañada de una condición inicial:

$$v(t_0) = v_0.$$

En lo que sigue omitimos las unidades, pero los valores están calculados en función del sistema MKS (Kg para la masa, metros para la longitud, segundos para el tiempo).

Envíe el o los programas a ecn.matlab@gmail.com. Las preguntas de los items 1 y 2 son más o menos retóricas. El objetivo principal es que piense y entienda qué está pasando. Si tiene ganas, contéstelas en el cuerpo del mail (pueden sumar algún poroto).

0. Mire fijo la ecuación (1) hasta convencerse de que tiene una solución constante:

$$v_\infty = \sqrt{g \frac{m}{b}}$$

v_∞ se llama *velocidad límite*.

- A modo de ejemplo, consideremos una bolita de vidrio de masa $m = 0.0083$ lanzada desde lo alto de un edificio. En este caso, la constante b puede estimarse por $b = 9 \times 10^{-5}$, y consecuentemente $v_\infty = 30$. Queremos estudiar la evolución de la velocidad de la bolita en el intervalo de tiempo $[0, 10]$ para distintas velocidades iniciales: $v_0 = 0$, $v_0 = 5$, $v_0 = 10, \dots, v_0 = 55$, $v_0 = 60$ (es decir: algunas por encima y otras por debajo de v_∞).
Haga un programa de Matlab que resuelva la ecuación (1) utilizando el método de Euler (con paso $h = 0.1$) para todos los valores iniciales antedichos. Dibuje, en un mismo gráfico, la evolución de v en función de t para todos los valores de v_0 considerados. ¿Qué observa? ¿Por qué v_∞ se llama velocidad límite?
- Es importante tener en cuenta que un paso h demasiado grande puede resultar en comportamientos anómalos, que no se condicen con la realidad física. Tomando los mismos datos del item anterior, considere el caso particular en que $v_0 = 20$ y resuélvalo con $h = 2$. Grafique. ¿Cuál es la velocidad máxima alcanzada? ¿Cómo se relaciona esto con los resultados obtenidos en el item anterior?
- Pensemos ahora en un paracaidista de masa $m = 70$, que se deja caer desde un avión. En este caso, la constante b puede estimarse por $b = 0.2$. Supongamos que el paracaidista quiere esperar a llegar cerca de la velocidad límite antes de abrir el paracaídas. Queremos saber a partir de qué momento puede abrirlo. Haga un programa que: tome como dato inicial $v_0 = 0$; calcule el valor de v_∞ ; corra el algoritmo de Euler (con paso $h = 0.1$) durante un tiempo indefinido y se detenga cuando $v_\infty - v$ sea menor que 10^{-2} . Devuelva la velocidad alcanzada y el tiempo que se tardó en alcanzarla.

Recordar:

El método de Euler para la ecuación:

$$y' = f(t, y)$$

viene dado por:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

Observaciones:

No hace falta programar el método de Euler en general. Basta con escribir el código para la ecuación (1) en particular.

Puede implementar tres scripts distintos (uno para cada item), o uno sólo. En este último caso, introduzca los comandos **figure(1)** y **figure(2)** antes de realizar los gráficos de los items 1 y 2 respectivamente. De este modo se generarán dos figuras distintas.