Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2013

Espacios de Sobolev y Soluciones Débiles

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $u,\ v \in W^{k,p}(\Omega),\ |\alpha| \le k$. Entonces
   (a) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ y $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo par de multiíndices α, β tales que $|\alpha| + |\beta| \le k$.
   (b) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
   (c) Si $V \subset \Omega$, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.
   (d) Si $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ y
   $$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha \zeta D^{\alpha-\beta} u.$$
   (e) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

2. (a) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $1 \le p < \infty$ entonces $u \in AC[a,b]$.
   (b) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $p > 1$, entonces
   $$|u(x) - u(y)| \le \left(\int_a^b |u'|^p dt\right)^{1/p} |x-y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

3. Sea $f \in H^1(\mathbb{R})$, probar que $h^{-1}(\tau_h f - f)$ converge a f' en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$, donde $\tau_h f(x) = f(x+h)$.
   Hint: escribir $h^{-1}(\tau_h f - f)$ como $f' * \varphi_h$.

4. (a) Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1((a,b))$ $|f(x)| \le C\|f\|_{H^1((a,b))}$
   (b) Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H_0^1((a,b))$ $|f(x)| \le C\|f'\|_{L^2((a,b))}$.
   (c) Concluir que $\|f'\|_{L^2((a,b))}$ es una norma equivalente a $\|f\|_{H^1((a,b))}$ en $H_0^1((a,b))$.
   (d) Mostrar que (a) es falso en $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$.
   (e) Usando el teorema de Arzelá-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1((a,b))$ es precompacto en $C([a,b])$, y por lo tanto en $L^2((a,b))$.

5. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega),\ 1 \le p < \infty$. Definimos $u^\varepsilon \equiv \eta_\varepsilon * u$ en Ω_ε (dónde η es el nucleo regularizante, η_ε las aproximaciones de la identidad y $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega / \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$). Entonces
   (a) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$.
   (b) $u^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

6. Probar que si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ entonces
   $$\int_\Omega |Du|^2 dx \le C\left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right)^{1/2}.$$
   (Hint: Mirar la práctica de funciones armónicas) Concluir que en $H_0^2(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a la usual.

7. Supongamos que Ω es conexo y que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ satisface $\nabla u = 0$ a.e. en Ω. Probar que u es constante en Ω.

8. Sea Ω un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$ con borde C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de n y Ω tal que
$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$
para cada $u \in H^1(\Omega)$, donde
$$(u)_\Omega = \fint_\Omega u\,dx.$$

9. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 con F' acotada. Supongamos que Ω es acotado y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Probar que
$$F(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad F(u)_{x_i} = F'(u)u_{x_i} \ (i = 1, \ldots, n).$$

10. Sea $1 < p < \infty$ y Ω acotado.
    (a) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$.
    (b) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ y
    $$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{a.e. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$
    $$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{a.e. en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{a.e. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$
    (Sugerencia: $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para
    $$F_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0.) \end{cases}$$
    (c) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces
    $$\nabla u = 0 \text{ a.e. en } \{u = 0\}.$$

11. Consideremos el siguiente operador elíptico
$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + cu.$$
donde $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$.
Probar que existe una constante $\mu > 0$ tal que la correspondiente forma bilineal $B[\ ,\ ]$ satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram si $c(x) \geq -\mu$ $(x \in \Omega)$.

12. Una función $u \in H_0^2(\Omega)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador *bilaplaciano*
$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$
si verifica
$$\int_\Omega \Delta u \Delta v\,dx = \int_\Omega fv\,dx$$
para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. $(\Delta^2 u = \Delta(\Delta u))$.
    (a) Probar que $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución clásica de (1) si y sólo si es solución débil de (1).
    (b) Probar que dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil de (1).
    (Sugerencia: Usar el ejercicio 9 de la práctica de Sobolev para probar que $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ define una norma equivalente a la usual en $H_0^2(\Omega)$)

13. Consideremos la siguiente ecuación diferencial elíptica de segundo orden:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j}) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} + cu &= f \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

(a) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ con $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega$.
(b) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$.
(c) $b_j \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $\operatorname{div}(\vec{b}) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} b_j = 0$ en Ω.

Probar que para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema.

14. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Dar una formulación débil del problema y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_\Omega f\,dx = 0$.
(b) Mostrar que si $f \in L^2(\Omega)$ verifica que $\int_\Omega f\,dx = 0$, entonces existe una única $u \in H^1(\Omega)$ con $\int_\Omega u\,dx = 0$ solución débil de este problema. Más aún, dicha solución es única en $H^1(\Omega)$ salvo constante.

(Sugerencia: Usar la desigualdad de Poincaré para funciones con promedio 0, ejercicio 11 de la práctica de Sobolev, y usar Lax-Milgram en el subespacio ortogonal a las constantes en $H^1(\Omega)$).

15. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$.

Probar que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \nearrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(\Omega)$ donde $u_1 = cte$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y una base ortogonal de $H^1(\Omega)$.

16. *Lema de Cea*

Se intenta construir una aproximación de la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Para eso, se toma un subespacio de dimensión finita $V \subset H_0^1(\Omega)$, $V = \langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$ y se define la *solución aproximada* $\tilde{u} \in V$ como la solución del problema

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u}\nabla\phi_i\,dx = \int_\Omega f\phi_i\,dx \quad i = 1, \ldots, n.$$

(a) Probar que $\tilde{u}$ está bien definida (es decir, existe una única solución del problema aproximado).
(b) Probar que se tiene la siguiente *estimación de error*

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V} \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

es decir, el método da la "mejor aproximación" que permite el subespacio V.