Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2013
ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

1. Hallar, para $a \in \mathbb{R}$, la solución de
$$\begin{cases} u_t + au_x &= u^2 \quad t > 0, \\ u(x,0) &= x \end{cases}$$

2. Hallar la solución de
$$\begin{cases} u_t + au_x + bu_y &= t \qquad\qquad t > 0, \\ u(x,y,0) &= g(x,y), \end{cases}$$
con $a, b \in \mathbb{R}$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$.

3. Hallar la solución del problema
$$\begin{cases} u_t + u_{x_1} + \cdots + u_{x_n} &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} &= f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

4. Resolver
$$\begin{cases} u_{x_1} + \cdots + u_{x_n} &= e^{-\sum_{i-1}^n x_i} \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=0} &= x_2 \end{cases}$$

5. Resolver
$$\begin{cases} x \cdot \nabla u &= |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=1} &= 3x_n. \end{cases}$$
Estudiar el dominio de definición de la solución.

6. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de
$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
es $u(x,y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.
Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x = u$.
¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

7. Probar que no existe solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u$$
que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

8. Probar que la solución de la ecuación
$$u_x + u_y = u^2$$
cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = u$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

9. Usar el principio de Duhamel para resolver el problema
$$\begin{cases} c_t + vc_x &= f(x,t) \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ c(x,0) &= 0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Hallar una fórmula explícita cuando $f(x,y) = e^{-t}\sin x$.
Recordar que el método de Duhamel consiste en hallar $w(x,t;s)$ que verifique
$$\begin{cases} w_t + vw_x &= 0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R},\ t > s \\ w(x,s;s) &= f(x,s) \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
y luego encontrar u como
$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t;s)\,ds.$$